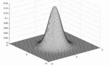
第 4 章

典型统计案例

一方一药命关天，　试验调查数据先．

数据无言谁识得，　精推细算系平安．



统计学是研究如何从数据中提取有用信息的科学，内容包括如何收集和分析数据．基于统计学的数据处理方法称为统计方法．在科学研究、工农业生产、新产品开发、产品质量的提高乃至政治、教育、社会科学等各个领域，使用统计方法和不使用统计方法获得的结果是大不相同的．只要统计方法使用得当，往往能够得到事半功倍的效果．这已成为统计学能随着科学技术和国民经济的发展而快速发展的重要原因．时至今日，统计已成为世界上各个层次的政府机构的重要支柱．

4.1 随机对照试验案例

二维正态分布曲面

无论人们意识与否，统计学存在于工农业生产、国民经济和日常生活之中，不懂统计可能会造成不知不觉的损失.

收集数据的方法之一是从总体中进行抽样，另外一个方法是在试验中得到观测数据．为了能根据试验的数据对试验进行合理的分析，需要对试验进行合理的安排．

案例 1　（坏血病的研究）17 世纪初期，长期在海上航行的水手经常患坏血病．坏血病的症状是牙龈肿大出血，皮肤上出现青灰的斑点．英国海军部试图考察坏血病的起因．他们怀疑这是因为水手体内缺少柑橘类水果中的某种成分造成的．当此想法提出时，刚好有 4 艘军舰要远航．为了调查水手是否由于缺少柑橘类的水果而导致坏血病，海军部设计了一次试验：随机地安排一艘军舰上的水兵每天喝柑橘汁，另外 3 艘军舰不供应柑橘汁．

试验的结果是：航行还没有结束，没有提供柑橘汁的水手多数得了坏血病，而提供柑橘汁的军舰没有发现坏血病．最后，提供柑橘汁的军舰不得不把携带的柑橘汁分给其他的军舰，以帮助他们顺利返航．

尽管本次试验的计划还可以从各个方面进行改进，但是试验的结果成功地证实了最初的怀疑．

在案例 1 中，我们称喝柑橘汁的水兵为试验组（experimental group），称不喝柑橘汁的水兵为对照组（control group）．

试验组由随机选择出的对象构成，试验组的成员要接受某种特殊的待遇或治疗等．而对照组由那些没有接受这种特殊待遇的对象构成．一个好的试验设计都应当有一个试验组和一个对照组．

在案例 1 中，如果没有对照组，为 4 艘军舰都提供柑橘汁，就没有水兵患上坏血病，海军部就不能确认他们的最初怀疑．因为不能确定是否是其他的食品或治疗避免了坏血病．

为什么试验组要随机抽取呢？

设想在案例 1 中，如果安排喜欢喝柑橘汁的水兵在试验组，喜欢

喝啤酒的水兵在对照组，就不能确定研究开始前这两组水兵的身体状况是否有差异．水手身体状况的差异也可能影响是否容易得坏血病．随机选择试验组能够有效地抵消个体差异造成的对试验结果的影响．

随机选择试验对象是英国统计学家费歇（Fisher）的贡献．在 20 世纪初，他用此方法致力于农业试验的研究．从此随机选择试验组成为安排试验的基本原则．

案例 2　（静脉吻合分流术）在一些肝硬化病例中，许多病人会肝出血直至死亡．历史上有一种称为“静脉吻合分流术”的外科手术用于治疗肝硬化，其原理是运用外科手术的方法使血流改变方向．这种手术花费很大，并且有很高的危险性．值得做这样的手术吗？

为了解决上述问题，一共进行了三批共 51 次手术试验．第一批进行了 32 次无对照组的试验．结果如下：

设计方法	试验次数	显著有效	中等有效	无效
	32	24	7	1
所占比例		75 %	21.9 %	3.1 %

试验说明有 75 % 的手术显著有效，21.9 % 的手术中等有效，看来手术是值得做的．

第二批共进行了 15 次手术试验．这批试验有对照组，但是对照组的病人不是随机选取的．医生根据病人的临床诊断情况决定是将病人编入试验组做手术，还是编入对照组不做手术．结果如下：

设计方法	试验次数	显著有效	中等有效	无效
	15	10	3	2
所占比例		66.7 %	20 %	13.3 %

这次试验的结果是 66.7 % 的手术显著有效，20 % 的手术中等有效，13.3 % 的手术无效．这个试验结果也是对静脉吻合分流术的肯定．这次的结果与无对照组的试验结果差别不是很大．

再看有随机选取对照组的第三批试验．这批试验共有 4 次手术．随机选取的方式可以是掷硬币，如果硬币正面朝上就将病人选入试验组做手术，否则放入对照组不做手术．这次试验的结果如下：

设计方法	试验次数	显著有效	中等有效	无效
	4	0	1	3
所占比例		0 %	25 %	75 %

以上数据来源于 Journal of Gastroenterology, Vol. 50 (1966), pp. 646－691.

随机对照试验的结果显著地否定了外科手术“静脉吻合分流术”.

结果显示：没有随机选取对照组的前两批试验研究过分夸大了外科手术“静脉吻合分流术”的价值. 经过认真设计的有随机选取对照组的实验研究显示“静脉吻合分流术”几乎没有什么价值.

为什么会出现如此大的差别呢?

在无对照组和非随机选取对照组的试验中，实验者根据病人的临床诊断决定是否将他编入试验组进行手术. 这样做就出现一种自然的倾向：试验人员更倾向于将那些身体状态较好的病人选入试验组，以减少手术风险. 其结果有利于对手术的肯定评价，这种结果是不真实的.

对上述试验的跟踪观测发现，做手术的 51 个病人中 3 年后大约有 60 % 仍然活着，随机对照组中（没做手术的病人）3 年后大约也有 60 % 的病人仍然活着. 这就说明手术基本是无效的. 而在非随机对照组中，只有 45 % 的病人存活期超过 3 年，这就说明了非随机对照组中的病人健康情况较差，验证了健康情况较好的病人更容易被选入试验组.

随机安排对照组是十分必要的，否则可能得出错误的结论.

我们称随机选取试验组的对照试验为随机对照试验.

在随机对照试验中，为了得到更真实的结果，有时还需要其他的手段配合.

案例 3 1916 年小儿麻痹症（脊髓灰质炎）袭击了美国，以后的 40 年间，受害者成千上万. 20 世纪 50 年代，人们开始研究预防疫苗. 当时萨凯（Salk）培育的疫苗最有希望. 他的疫苗在实验室中表现良好：安全，产生对脊髓灰质炎病毒的抗体. 但是在大规模使用前必须进行现场人体试验，通过试验最后确定疫苗是否有效. 只有这样才能达到保护儿童的目的.

当时采用了随机对照的研究方案，对每个儿童用类似投掷一个硬币的方法决定是否将他编入试验组，正面朝上分在试验组，否则分在对照组．除了试验的设计人员，连医生也不知道哪个儿童分在试验组，哪个儿童分在对照组．

然后给分在试验组的儿童注射疫苗；给分在对照组的儿童注射生理盐水，让他们认为也被注射了疫苗．得到的结果如下：

	试验人数	试验后的发病率
试验组	20 万	28/100 000
对照组	20 万	71/100 000

试验结果显示，疫苗将小儿麻痹症的发病率从 $\frac{71}{100\ 000}$ 降低到 $\frac{28}{100\ 000}$．由于 71 和 28 的差别超出了随机性本身所能解释的范围，所以宣布疫苗是成功的．

我们把对照组中的处理方法称为使用安慰剂．案例 3 中的安慰剂是注射生理盐水．给对照组的儿童使用安慰剂是为了避免儿童的心理作用影响试验的结果．尽管可以认为光靠精神作用不能抵抗小儿麻痹症，但是为了确认试验结果的可靠性，使用安慰剂是必要的．

不让医生知道儿童是来自试验组还是对照组，是为了使医生能够作出更公正的诊断，避免在诊断儿童是否患有小儿麻痹症时受到心理因素的影响．

在许多场合，心理因素是不能忽视的．有资料显示在医院中给那些手术后产生剧痛的病人服用由淀粉制成的“止痛片”后，大约有 $\frac{1}{3}$ 的病人感觉剧痛减轻．

练　习

某个社会团体的 18 位理事开会决定是否增加一位新理事甲某，哪种选举方式最能体现与会理事们的真实意愿（　　），哪种选举方式有利于甲人选理事会

（ ）.

(A) 请同意增选甲为理事的举手　　(B) 请不同意增选甲为理事的举手

(C) 采用记名投票　　(D) 采用无记名投票

习题 1

学而时习之

1. 叙述什么是对照组，什么是试验组，什么是随机对照试验.
2. 举例说明采用随机对照试验的必要性.
3. 在评价一种治疗高血压的磁疗手表时，调查了 100 位刚开始使用这种手表的高血压患者，他们中有 75 人回答磁疗手表对降低高血压有效.
   (1) 能否作出这种磁疗手表对降低高血压的有效率是 75 % 的结论；
   (2) 设计一种能够公平评价这种磁疗手表的试验方案；
   (3) 你的设计中试验组和对照组是随机选取的吗？
   (4) 在你的设计中，使用"安慰剂"了吗？安慰剂是什么？
   (5) 在对参加试验的人进行高血压的测量时，你让医生知道被测者使用的是磁疗手表还是外观完全相同的普通手表了吗？

4.2 事件的独立性

元素作为试验的可能结果，又被统计学家们称为试验的样本点（sample outcome）或基本事件.

试验的全集 Ω 又被统计学家们称为样本空间（sample space）.

学习概率时，我们把试验的可能结果称为试验的元素，把元素构成的集合称为试验的全集. 用 Ω 表示试验的全集时，Ω 的子集是事件.

设全集 Ω 中有有限个元素，$A\subseteq\Omega$. 如果 Ω 中每个元素发生的可能性相同，就称

$$P(A)=\frac{A\text{ 中元素数}}{\Omega\text{ 中元素数}}$$

为 A 发生的概率，简称为 A 的概率.

在计算事件 A 的概率时，先计算全集 Ω 中元素个数，然后再计算事件 A 中元素个数. 特别要注意，全集 Ω 中每个元素发生的可能性必须相同.

投掷一枚骰子和一枚硬币，骰子的点数和硬币是否正面朝上是独立的. 这时我们称投掷一枚骰子的试验和投掷一枚硬币的试验是独立的.

用 Ω_1 表示第一个试验的全集，用 Ω_2 表示第二个试验的全集. 如果这两个试验是独立的，就称全集 Ω_1 和 Ω_2 独立（independent）.

理论和试验都证明了以下结论：

当事件的全集 Ω_1 和 Ω_2 独立，对于 $A\subseteq\Omega_1$ 和 $B\subseteq\Omega_2$，有

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$

这时我们也称事件 A，B 独立.

例 1 投掷一枚骰子和一枚硬币. 计算骰子出现 2 或 4 点，硬币正面朝上的概率.

解 用 A 表示骰子的点数是 2 或 4，用 B 表示硬币正面朝上，则 A，B 独立. $A\cap B$ 表示骰子出现 2 或 4 点，硬币正面朝上.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

例 2 同学甲的数学作业得优的概率是 0.8，同学乙的语文作业得优的概率为 0.7. 今天同时留了数学和语文作业，计算甲的数学得优，乙的语文没得优的概率.

解 用 A 表示甲的数学作业得优，用 B 表示乙的语文作业没有得优，则

$$P(A)=0.8,\quad P(B)=1-0.7=0.3.$$

$A\cap B$ 表示甲的数学作业得优，乙的语文没有得优. A,B 独立，所以

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times0.3=0.24.$$

全班 45 个同学同时随机地翻开数学书，用 A_j 表示第 j 个同学翻开的左面页数在 30 页或以下，则事件

$$A_1,A_2,\cdots,A_{45}$$

是相互独立的.

对于 $j=1,2,\cdots,n$，用 Ω_j 表示第 j 个试验的全集．如果这 n 个试验是相互独立的，就称这些试验的全集 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$ 是相互独立的.

理论和试验都证明了以下结果：

> **如果试验的全集 $\boldsymbol{\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n}$ 是相互独立的，则对**
>
> $$A_1\subseteq\Omega_1,\ A_2\subseteq\Omega_2,\ \cdots,\ A_n\subseteq\Omega_n$$
>
> **有**
>
> $$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

这时，我们也称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

例 3 高中每个年级三个班的羽毛球水平相当，各年级举办班级羽毛球比赛时，计算都是三班得冠军的概率.

解 用 A_i 表示第 i 年级的三班获得冠军，则 A_1,A_2,A_3 相互独立.

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}.$$

事件

$$A=A_1\cap A_2\cap A_3$$

表示都是三班得冠军．由于 A_1,A_2,A_3 相互独立，所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cap A_2\cap A_3)\\&=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\&=\frac{1}{3^3}\approx 0.037.\end{aligned}$$

例 4 一服装店出售标价为 180 元的夹克．售货员对前来问价的顾客以 180 元推销成功的概率是 0.8．如果一小时内有两位顾客前来问价，计算服务员对这两位顾客都没有推销成功的概率.

解 用 A_1,A_2 分别表示对第一、第二位顾客没有推销成功，则 A_1,A_2 独立．$A=A_1\cap A_2$ 表示对这两位顾客都没有推销成功．利用

$$P(A_1)=P(A_2)=1-0.8=0.2$$

得到

$$P(A)=P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.2\times0.2=0.04.$$

例 5 下棋时，李浩每局赢张岚的概率只有 0.45．假设他们下棋时各局的输赢是独立的．

（1）计算李浩连输 3 局的概率；

（2）计算 3 盘棋中李浩至少赢 1 局的概率．

解 （1）A_1，A_2，A_3 分别表示第 1，第 2，第 3 局李浩输．则

$$B=A_1\cap A_2\cap A_3$$

表示李浩连输 3 局．因为事件 A_1，A_2，A_3 相互独立，并且

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1-0.45=0.55,$$

所以李浩连输 3 局的概率是

$$P(B)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.55^3\approx0.1664.$$

（2）A 的对立事件 B 表示李浩至少赢 1 局．

$$P(B)=1-P(A)\approx0.8336.$$

说明 3 盘棋中李浩至少赢 1 局的概率还是很大的．

本例中不考虑心理因素的影响．

练　习

1．幸运抽奖活动中，中奖的比率是百分之一．计算：

（1）随机抽取一张，没中奖的概率 p_1；

（2）有放回随机抽取 $n=100$ 张，没中奖的概率 p_n；

（3）有放回随机抽取 $n=100$ 张，至少中奖一次的概率．

2．在彩票的公开摇奖活动中，购买一张彩票的中奖率是千分之一（包括各类小奖）．计算购买 n 张彩票不能中奖的概率．

习题 2

学而时习之

1．投掷一枚骰子三次，计算三次都出现点数 6 的概率．

2. 假设每个人的生日在一年的 365 天中是等可能的．在全校随机选取两名同学，计算以下事件的概率．

(1) 两位同学的生日都在 5 号；

(2) 一位同学的生日在 5 号，另一位的生日在 7 号．

3. 某人的手机在一天内收到 k 条短信的概率 p_k 如下：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0.01	0.06	0.16	0.25	0.25	0.17	0.07	0.02	0.01

(1) 计算该手机明天和后天各收到 5 条短信的概率；

(2) 计算该手机明天和后天共收到 5 条短信的概率；

(3) 计算该手机明天和后天一共收到至多 5 条短信的概率．

多知道一点

假设检验案例

现在我们解决本章一开始遇到的问题．

案例 1 一条新建的交通干线全长 10 km，前半段 5 km，后半段 5 km．在刚刚通车的一个月中，后半段就发生了 4 起交通事故，而前半段没有发生交通事故．能否认为后半段发生交通事故的概率比前半段大？

解 同一起交通事故发生在后半段就不能发生在前半段，就像硬币掷出反面就不会出现正面一样．4 起交通事故的发生是相互独立的，它们之间没有联系．

如果前后半段发生交通事故的概率相同，则每一起事故发生在后半段的概率都是 0.5，于是这 4 起交通事故都发生在后半段的概率是

$$0.5^4=0.0625.$$

这是一个很小的概率，一般不会发生．所以我们认为后半段发生交通事故的概率比前半段大．

做出以上结论也是有可能犯错误的，犯错误的概率正是 0.062 5．

这是因为当前后半段发生交通事故的概率相同，而 4 起交通事故又都出现在后半段时，我们才犯错误．也就是说我们犯错误的概率等于前后半段发生交通事故的概率相同的条件下，4 起交通事故都出现在后半段时的概率．这一概率正是 0.062 5．于是，我们判断正确的概率是 $1-0.0625=93.75\%$．

因此我们是以 93.75 % 的把握保证后 5 km 比前 5 km 更容易发生交通事故．

得到了上述结果后，交通管理部门很快在进入后半段的地点安放了警示牌：前方是事故多发路段，请小心驾驶．

案例 2 一服装店出售标价为 180 元的夹克．售货员声称对前来问价的顾客以 180 元推销成功的概率是 $p=0.6$．现在一小时内有 4 位顾客前来问价，服务员对这 4 位顾客都没有推销成功．能否判定售货员的 $p=0.6$ 不对．

解 用 A_1，A_2，A_3，A_4 分别表示对第 1，第 2，第 3，第 4 位顾客没有推销成功，则 A_1，A_2，A_3，A_4 相互独立．$A=A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$ 表示对这 4 位顾客都没有推销成功．利用

$$P(A_j)=1-0.6=0.4,\qquad j=1,2,3,4$$

得到

$$P(A)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)=0.4^4=0.0256.$$

这是一个小概率事件，其发生的原因很可能是 $p=0.6$ 不对．所以应当判定售货员的 $p=0.6$ 不对．作出这个结论也可能犯错误，犯错误的概率是 2.56 %．于是判断正确的概率是 97.44 %．因此，我们以 97.44 % 的概率保证 $p<0.6$．

案例 3 某地区的山羊患某种疾病的概率是 0.4，且每只山羊患病与否是相互独立的．现在为了判断一种新的预防药是否有预防作用，随机选取了 6 只山羊做试验，这 6 只山羊用药后都没有得这种病．问此新药是否有效．

解 初看起来，6 只山羊用药后都没有得病，应当判断新药有效．

但是细想一下，就会发现即使新药无效，6 只山羊也可能都不得病．为了作出正确的判断，让我们假设新药无效，然后看看事实是否

支持这个假设.

用 A_i 表示第 i 只山羊不得病，则 A_1，A_2，…，A_6 相互独立，$A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_6$ 表示 6 只山羊都不得病.

假设新药无效，则 $P(A_i)=1-0.4=0.6$. 于是有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_6)\\&=P(A_1)P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_6)\\&=0.6^6\approx 0.0467.\end{aligned}$$

这个概率很小，几乎不会发生，说明我们的假设有问题. 于是我们否定原来的假设，认为新药是有效的.

否定新药无效也可能犯错误，但是犯错误的概率是 0.046 7. 因为只有在新药无效的条件下，6 只山羊都不得病，我们才犯错误.

案例 3 解决的问题是统计中的假设检验问题. 先作一个假设：新药有效，在这个假设下看看实际情况是否支持这个假设. 如果在这个假设下小概率事件发生了，说明实际情况不支持这个假设，于是我们就否定这个假设.

实际问题中经常将小于或等于 0.05（或 0.1）的概率视为小概率，这时否定"假设"，犯错误的概率不超过 0.05（或 0.1）.

4.3 列联表独立性分析案例

在许多实际问题中，我们需要考察两种因素的关系. 例如，

患肺癌与吸烟是否有关；

儿童语言能力是否与他们的性别有关；

汽车司机不系安全带是否与发生车祸时司机遭受致命性伤害有关.

为了分析这些问题，我们需要用问卷调查或现场记录等方式获取一批数据. 例如，为了了解患肺癌是否与吸烟有关，就需要调查其他条件都基本相同的 n 个人，将调查结果列成表 4.1 的形式，其中 X

表示“是否吸烟”，Y 表示“是否患肺癌”.

表 4.1

X \ Y	患肺癌(B)	不患肺癌($\bar{B}$)	总计
吸烟(A)	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
不吸烟($\bar{A}$)	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
总计	n_{+1}	n_{+2}	n

其中 $n_{1+}=n_{11}+n_{12}$ 是吸烟的总人数；

$n_{2+}=n_{21}+n_{22}$ 是不吸烟的总人数；

$n_{+1}=n_{11}+n_{21}$ 是患肺癌的总人数；

$n_{+2}=n_{12}+n_{22}$ 是不患肺癌的总人数；

$n=n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}$.

我们称类似 4.1 的表格为列联表；

称 X、Y 为两个因素；

称“吸烟”和“不吸烟”为 X 的两个水平；

称“患肺癌”和“不患肺癌”为 Y 的两个水平；

由于所涉及的两个因素 X、Y 均有两个水平，所以称表 4.1 为 2×2 列联表.

列联表 4.1 的独立性分析就是根据表中的数据分析因素 X、Y 是否相互独立.

下面我们通过对具体的案例分析学习列联表的独立性分析方法.

案例 患肺癌与吸烟是否有关？

为研究患肺癌是否与吸烟有关，从一大批在年龄、生活和工作环境等方面相仿的男性中分别随机抽取了 60 位肺癌患者和 40 位不是肺癌患者，调查他们是否吸烟. 调查结果列入表 4.2.

值得指出的是：这里要求被调查对象在年龄、生活和工作环境等因素方面尽量相同是为了避免这些因素对“是否患肺癌”的影响，因为不同的年龄段或者不同的生活、环境等因素可能也会导致人们易患肺癌. 如果调查时不考虑这些因素，即使我们分析的结果是患肺癌与吸烟有关，也不清楚这种关系真正反映的是患肺癌与吸烟之间的关

系，还是由其他因素引起的关系．

因此，只有尽量控制调查对象在其他方面尽可能一致，才能根据调查数据有效地分析患肺癌与吸烟的相关性．将上述调查数据列成 2×2 列联表，并计算出各行各列的和，得到表 4.2．

表 4.2　　　　　肺癌与吸烟的调查数据

X \ Y	患肺癌(B)	未患肺癌($\bar{B}$)	总计
吸烟(A)	39	15	54
不吸烟($\bar{A}$)	21	25	46
总计	60	40	100

从表 4.2 看出，在 54 个吸烟的人中有 39 人患肺癌，患者占 $39/54=72.22\%$；在不吸烟的 46 人中，有 21 人患肺癌，患者占 $21/46=45.65\%$．吸烟者中患肺癌的比例比不吸烟者中患肺癌的比例高出

$$72.22\%-45.65\%=26.57\%.$$

这种差异似乎已经说明吸烟与患肺癌有很大关系．但仔细想想，由于这 100 人是随机选取的，会不会由于随机抽样的误差使得所抽取的 60 位肺癌患者中碰到了较多的吸烟者，而在 40 位非肺癌患者中碰到了较多的不吸烟者．这样也可导致吸烟者中肺癌患者的比例比不吸烟者中肺癌患者的比例高．

于是，我们还需进一步用统计方法说明单凭随机抽样的误差还不足以造成如此大的差异．

在本例中，$n=100$

$$n_{11}=39,\ n_{12}=15,\ n_{21}=21,\ n_{22}=25;$$

$$n_{1+}=54,\ n_{2+}=46,\ n_{+1}=60,\ n_{+2}=40.$$

为分析 X、Y 是否独立，就先假设 X、Y 独立．也就是假设“吸烟”与“患肺癌”独立．这时 A 与 B 独立，$\bar{A}$ 与 B 独立，A 与 $\bar{B}$ 独立，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 独立．

于是　$P(AB)=P(A)P(B)$，　$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)$，

$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$，　$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$．

根据概率与频率的关系，知道

$$P(AB)\text{的估计为 }\hat{P}_{AB}=\frac{n_{11}}{n}=0.39,$$

$$P(\bar{A}B)\text{的估计为 }\hat{P}_{\bar{A}B}=\frac{n_{21}}{n}=0.21,$$

$$P(A\bar{B})\text{的估计为 }\hat{P}_{A\bar{B}}=\frac{n_{12}}{n}=0.15,$$

$$P(\bar{A}\bar{B})\text{的估计为 }\hat{P}_{\bar{A}\bar{B}}=\frac{n_{22}}{n}=0.25.$$

$$P(A)\text{的估计为 }\hat{P}_{A}=\frac{n_{1+}}{n}=0.54,$$

$$P(\bar{A})\text{的估计为 }\hat{P}_{\bar{A}}=\frac{n_{2+}}{n}=0.46,$$

$$P(B)\text{的估计为 }\hat{P}_{B}=\frac{n_{+1}}{n}=0.6,$$

$$P(\bar{B})\text{的估计为 }\hat{P}_{\bar{B}}=\frac{n_{+2}}{n}=0.4.$$

因为假设 X、Y 独立，所以

$$\mu_{AB}=|\hat{P}_{AB}-\hat{P}_A\hat{P}_B|,\quad \mu_{\bar{A}B}=|\hat{P}_{\bar{A}B}-\hat{P}_{\bar{A}}\hat{P}_B|,$$
$$\mu_{A\bar{B}}=|\hat{P}_{A\bar{B}}-\hat{P}_A\hat{P}_{\bar{B}}|,\quad \mu_{\bar{A}\bar{B}}=|\hat{P}_{\bar{A}\bar{B}}-\hat{P}_{\bar{A}}\hat{P}_{\bar{B}}|.$$

都相应比较小，我们用

$$\chi^2=\frac{n\mu_{AB}^2}{\hat{P}_A\hat{P}_B}+\frac{n\mu_{\bar{A}B}^2}{\hat{P}_{\bar{A}}\hat{P}_B}+\frac{n\mu_{A\bar{B}}^2}{\hat{P}_A\hat{P}_{\bar{B}}}+\frac{n\mu_{\bar{A}\bar{B}}^2}{\hat{P}_{\bar{A}}\hat{P}_{\bar{B}}}$$
$$=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$$

表示 μ_{AB}、$\mu_{\bar{A}B}$、$\mu_{A\bar{B}}$、$\mu_{\bar{A}\bar{B}}$的总体大小．当 X、Y 独立时，χ^2取值应该比较小，当 χ^2取值较大时，表示 X、Y 独立的假设是不对的．

在本案例中，经过计算得到

$$\chi^2=\frac{100(39\times25-15\times21)^2}{54\times46\times60\times40}\approx7.31.$$

那么，$\chi^2=7.31$ 是否是太大呢？

统计学家已经证明了如下的结果：如果 2×2 列联表中的两个因素 X、Y 是独立的，则当随机调查的人数很多时（例如 $n_{ij}\geqslant5$ 人），有如下的结果．

$$P(\chi^2\geqslant6.64)\approx0.01.$$

在本案例中，由调查数据所得到的 $\chi^2=7.31>6.64$，这件事发生的概率

$$P(\chi^2\geqslant 7.31)\leqslant P(\chi^2\geqslant 6.64)\approx 0.01.$$

这是一个小概率事件，一般不会发生，在本案例中发生的原因很可能是由于假定“患肺癌与吸烟独立”不对．于是否定“是否患肺癌”与“是否抽烟”无关系的假设，认为患肺癌与吸烟有关系．再结合表 4－2中的调查数据，我们就有较充足的理由认为吸烟会使患肺癌的可能性增加．

至此，完成了对列联表 4.2 的独立性分析工作．

值得指出的是，我们在作出上述判断时也有可能犯错误，因为患肺癌与吸烟无关系时，χ^2 的值仍有可能超过 6.64，但是这件事发生的概率不超过 0.01．也就是说我们犯错误的概率不会超过 0.01．

练　习

用随机抽样方法调查全班同学上学期末的语文和英语成绩．

期末成绩在 85 分或 85 分以上记作 A，否则记作 B．将结果填入以下列联表．

调查中要保证每个同学的具体成绩不能公开．

成绩 性别	A	B	合计
男生			
女生			
合计			

习题 3

学而时习之

为了考察某种新药的副作用，给 50 位患者服用此新药，另外 50 位患者服

用安慰剂（一种和新药外形完全相同，但无任何药效的东西），得到如下观测数据．

药物 \ 副作用	有	无	合计
新药	15	35	50
安慰剂	4	46	50
合计	19	81	100

试分析新药是否会产生副作用．

4.4 一元线性回归案例

案例 1 海牛是一种体型较大的水生哺乳动物，体重可达到 700 kg，以水草为食．美洲海牛生活在美国的佛罗里达州，在船舶运输繁忙季节，经常被船的螺旋桨击伤致死．下面是佛罗里达州记录的 1977 年至 1990 年机动船只数目 x 和被船只撞死的海牛数 y 的数据．

年　份	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
船只数量 x	447	460	481	498	513	512	526
撞死海牛数 y	13	21	24	16	24	20	15
年　份	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
船只数量 x	559	585	614	645	675	711	719
撞死海牛数 y	34	33	33	39	43	50	47

现在问：

（1）随着机动船的数量的增加，被撞死的海牛数是否会增加？

（2）当机动船增加到 750 只，被撞死的海牛会是多少？

要解决上面的问题，先为数据画出散点图，横坐标是 x，纵坐标是 y，见图 4－1．

从数据散点图上看到 y，有随着 x 的增加而沿着一条直线增加的趋势．直线确定了，问题（1）也就解决了．但这条直线应当如何确定呢？

无论是从抽样调查中得到的成对数据，还是从科学试验、工农业生产中得到的成对数据，在统计学中都被称为观测数据或样本，数据

的个数被称为样本量.

上面案例 1 中的 14 对观测数据称为样本，由图 4－1 的 14 个点表示.

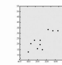


图 4－1 船只数量和被撞死海牛数的散点图

样本量是 n 的成对观测数据用

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n)$$

表示. 这里，对固定的 i，x_i 和 y_i 来自相同的个体，或是同一次试验的观测数据. 对 $i \neq j$，$(x_i,\ y_i)$ 和 $(x_j,\ y_j)$ 来自不同的个体，或是不同试验的观测数据.

对于上述观测数据，我们用 $\{x_i\}$ 表示数据 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，用 $\{y_i\}$ 表示数据 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$. 用 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别表示 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的均值. 用 s_x 表示 $\{x_i\}$ 的标准差，用 s_y 表示 $\{y_i\}$ 的标准差.

再引入

$$s_{xy} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{n} - \bar{x}\bar{y}.$$

定义 (1) 当 $s_xs_y \neq 0$，我们称

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_xs_y}$$

为 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的相关系数；

(2) 当 $r_{xy} > 0$，我们称 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 正相关；

(3) 当 $r_{xy} < 0$，我们称 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 负相关；

(4) 当 $r_{xy} = 0$，我们称 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 不相关；

理论上可以证明相关系数 r_{xy} 的以下性质：

（1）r_{xy} 总是在区间 $[-1, 1]$ 中取值；

（2）当 r_{xy} 接近于 1 时，x 增加，y 也倾向于增加，这时数据

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

分散在一条上升的直线附近；

（3）当 r_{xy} 接近于 -1 时，x 增加，y 倾向于减少，这时数据

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

分散在一条减少的直线附近.

图 4－2 至图 4－3 分别是 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 之间正相关和负相关的举例．样本量都是 50.

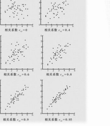


图 4－2　$r_{xy}\geqslant 0$

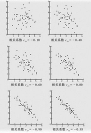


图 4－3　$r_{xy}<0$

从图中看出当 $r_{xy}>0.8$，y 有随着 x 的增加而增加的趋势．这时我们认为 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 是高度正相关的．当 $r_{xy}<-0.8$，y 有随着 x 的增加而减少的趋势．这时我们称 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 是高度负相关的．

现在我们来解决本节开始的案例 1 中的两个问题．

为解决问题（1），先计算机动船数 $\{x_i\}$ 和被撞死海牛数 $\{y_i\}$ 的相关系数 r_{xy}．

本案例中，经过计算得到

$$\bar{x}=567.5,\qquad \bar{y}=29.43,$$

$$s_x=88.56,\qquad s_y=11.75,\qquad s_{xy}=979.36,$$

于是相关系数

$$r_{xy}=\frac{979.36}{88.56\times 11.75}=0.941\,2.$$

说明被撞死的海牛数 y 和机动船数 x 高度正相关．所以只要机动船数增加，被撞死的海牛数就会增加．

为了解决问题(2)，需要为数据建立回归直线．设回归直线是

$$l：y=bx+a.$$

我们可以认为 y_i 和 x_i 满足以下的关系：

$$y_i=bx_i+a+e_i，i=1，2，\cdots，n$$

其中的 e_1，e_2，$\cdots$，e_n 表示随机误差．我们称上述的模型为一元线性回归模型（linear regression model）．

解决一元线性回归模型的方法是求出直线 l，这里的直线 l 就是以前学习的回归直线．

利用最小二乘法得到的 b，a 的最小二乘估计是

$$b=\frac{s_{xy}}{s_x^2}=\frac{979.36}{88.56^2}\approx 0.125,$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=29.43-0.125\times 567.5\approx -41.5.$$

回归直线是

$$l：y=0.125x-41.5.$$

回归直线的图形见图 4－4.

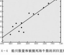


图 4－4　船只数量和被撞死海牛数的回归直线

当机动船数增加到 750 条时，被撞死的海牛数的预测值是

$$y=0.125\times 750-41.5\approx 52\ （只）.$$

案例 2 下面是我国 1990 年至 2000 年出口贸易额 x(百亿美元)和我国 GDP y(人民币百亿元)的数据，数据的散点图见图 4－5.

年　代	1990	1991	1992	1993	1994	1995
x	6.21	7.19	8.49	9.17	12.10	14.88
y	185.48	216.18	266.38	346.34	467.59	584.78
年　代	1996	1997	1998	1999	2000	
x	15.11	18.29	18.37	19.49	24.92	
y	678.85	744.63	783.45	820.68	894.42	

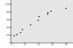


图 4－5　出口贸易额和 GDP 数据散点图

从图 4－5 看出 (x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, 11)$ 集中在一条直线附近，可以用线性回归模型

$$y_i=bx_i+a+e_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

来描述 x，y 之间的关系. e_i 描述了随机误差造成的影响，其中也包括了观测误差. 经计算

$$\bar{x}=14.02,\qquad \bar{y}=544.43,$$

$$s_x=5.67,\qquad s_y=247.67,\qquad s_{xy}=1\,372.09.$$

相关系数

$$r_{xy}=\frac{1\,372.09}{247.67\times 5.67}\approx 0.977.$$

所以，x 和 y 是高度相关的. 说明外贸出口带动了 GDP 的增长，可以计算出 a，b 的最小二乘估计

$$b=\frac{s_{xy}}{s_x^2}=\frac{1\,372.09}{5.67^2}\approx 42.68,$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=544.43-42.68\times 14.02\approx -53.94.$$

于是，回归直线为（见图 4－6）：

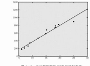


图 4－6　出口贸易额和 GDP 的回归直线

$$y=42.68x-53.94.$$

对于 2001 年的出口贸易额 $x=26.61$，可以用回归直线作出 2001 年 GDP 的预测值

$$y=42.68\times 26.61-53.94=1\,081.77.$$

练　习

（数学实践）通过随机抽样方法调查本班 9 个同学昨天 7 点后用于学习的时间和用于看电视的时间．

(1) 计算这两组数据的相关系数；

(2) 为数据建立回归直线；

(3) 画出回归直线和数据的散点图．

习题 4

学而时习之

1. 很多人关心比萨（Pisa）斜塔的倾斜状况．下面是 1975 年至 1986 年比萨斜塔的测量记录．其中的倾斜值是指塔上某个固定点与其初始位置的距离．为了简化数据，表中只给出小数点后面第 2 至第 4 位的值．例如把 2.964 2 m 简化成 642．

年份 x	1975	1977	1980	1982	1984	1986
倾斜值 y	642	656	688	689	717	742

（1）画出数据的散点图；

（2）计算年代 x 和倾斜量 y 的相关系数；

（3）如果不对比萨斜塔进行维护，它的倾斜情况是否会逐年恶化？

（4）建立回归直线，在散点图中补充回归直线；

（5）对 1976，1978，1979，1981，1983，1985，1987 年的倾斜量进行估计，并和以下的真实测量值进行比较．

年份 x	1976	1978	1979	1981	1983	1985	1987
倾斜值 y	644	667	673	696	713	725	757

2. （数学实践）在全班同学中随机抽样调查 10 个同学上学期的语文、数学、英语、物理、化学总评成绩．

（1）为每两门成绩计算相关系数；

（2）哪两门课程的相关性最强？

（3）为相关性最强的课程建立回归直线；

（4）为相关性最强的课程画出回归直线和调查数据的散点图．

数学文化

高斯与正态分布

伟大的天文学家伽利略（Galileo，1564—1642）可能是第一个提出随机误差概念的人，他在1962年出版的《关于两个主要世界系统的对话—托雷密和哥白尼》中提到了观测误差，并谈到了观测误差的以下性质：

（1）所有的观测都可以有误差，其来源可能归因于观测者、观测仪器和观测条件；

（2）观测误差对称地分布在0的两侧；

（3）小误差比大误差出现的更频繁．

这里的观测误差实际上是现在我们所说的随机误差．

1809年，高斯（Gauss，1777—1855）发表了天体力学的名著《绕日天体运动理论》，在这部著作的末尾，他写了一节有关数据组合的问题，实际上涉及的就是随机误差分布的问题．高斯在以后的研究工作中发现了正态分布，这一发现意义重大，也使正态分布有了高斯分布的名字．

高斯是一个伟大的数学家，一生中的重要贡献不胜枚举．但在今天德国的10马克纸币上印有高斯的头像和正态分布曲线，这就传达了一个信息：在高斯的科学贡献中，对人类文明影响最大者，正态分布也．

多知道一点

正态分布

很早以前，人们不知道圆周率（我们也假设 π 是未知的），为了研究圆的直径和周长的关系，需要对圆的周长进行测量．在测量前，用 X 表示测量值，称 X 是随机变量．测量后得到 X 的取值．

由于各种随机因素的存在，例如测量本身的随机误差等，使得对直径相同的圆的测量会得到不同的结果．

进行大量的独立重复测量后就得到了大量的测量值，理论和试验都证明这些测量值的样本方差会稳定在一个固定的数值 σ^2 附近．我们称 σ^2 为随机变量 X 的方差，或测量的方差，用 $D(X)$ 表示．

我们把 $\sigma=\sqrt{D(X)}$ 叫作随机变量 X 的标准差，或测量标准差．在一些实际问题中，标准差 σ 是已知的．标准差未知时，可以用多次测量值的样本标准差近似．

根据标准差的性质知道，σ 越小表示测量的精度越高，σ 越大表示测量精度越低．所以 σ 表示的是测量的精度．

例 1 对于直径 1 dm 的圆测量了它的周长 40 次，得到的测量数据如下（单位：dm）：

3.133	3.108	3.144	3.147	3.127	3.165	3.165	3.140
3.148	3.145	3.139	3.156	3.130	3.185	3.139	3.144
3.163	3.143	3.141	3.125	3.148	3.115	3.156	3.174
3.128	3.159	3.167	3.110	3.113	3.156	3.134	3.155
3.158	3.156	3.167	3.155	3.165	3.118	3.141	3.138

求其样本均值和样本标准差．

解 样本均值是

$$x=\frac{3.133+3.108+\cdots+3.138}{40}=3.145\ (\mathrm{dm}).$$

样本标准差是

$$s=\sqrt{\frac{(3.133-3.145)^2+(3.108-3.145)^2+\cdots+(3.138-3.145)^2}{40}}$$

$\approx 0.018(\mathrm{dm})$.

由于测量的次数已经较多，在测量误差的标准差 σ 未知时，可以用测量数据的样本标准差代替测量的标准差，即认为

$$\sigma=0.018\ (\mathrm{dm}).$$

高斯最早研究了测量误差问题，引入了标准正态密度（normal density）曲线

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},$$

其中的 e 约等于 2.718. 图 4－7 是标准正态密度函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

图 4－7　标准正态密度曲线

从图 4－7 可以看出 $\varphi(x)$ 有如下的特点：

(1) 曲线关于 y 轴对称；

(2) $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处达到最大值；

(3) 曲线和 x 轴所夹的面积等于 1；

(4) 用 $\Phi(a)$ 表示曲线阴影部分的面积（见图 4－7），则

$$\Phi(a)+\Phi(-a)=1,\quad \Phi(-a)=1-\Phi(a).$$

用 X 表示测量值时，如果测量误差仅由随机误差造成，就称测量没有系统偏差. 这时我们称被测物体的真实值 μ 是随机变量 X 的数学期望或均值，记作 $E(X)=\mu$.

由于 X 是测量值，所以对实数 a，

$$\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\leq a$$

是随机事件，下面的定理给出了这个事件发生的概率．

用 $E(X)=\mu$ 表示测量值 X 的数学期望，用 σ 表示测量的标准差，则有如下的结果．对于实数 a，

（1）$P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant a\right)=\Phi(a)$；

（2）$P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\geqslant -a\right)=\Phi(a)$；

（3）当 $a\geqslant 0$，$P\left(\dfrac{|X-\mu|}{\sigma}\leqslant a\right)=2\Phi(a)-1$．

在统计上经常用到 $a=1.96$ 的情况，人们已经计算出

$$\Phi(1.96)=0.975,\quad 2\Phi(1.96)-1=0.95.$$

于是

$$P\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}\leqslant 1.96\right)=0.95.$$

我们称定理 1 中的随机变量 X 服从数学期望是 μ，标准差是 σ 的正态分布（normal distribution）．

对直径等于 1 dm 的圆测量的周长是 X，设测量的标准差是 $\sigma=0.018$（dm）．用 μ 表示真正的周长，下面估计 μ 的大小．

根据上述性质得到

$$P\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}\leqslant 1.96\right)=2\Phi(1.96)-1=0.95.$$

说明事件

$$\{|X-\mu|\leqslant 1.96\sigma\}=\left\{\frac{|X-\mu|}{\sigma}\leqslant 1.96\right\}$$

发生的概率是 0.95．也就是说真值 μ 离开测量值 X 的距离小于 1.96σ 的概率是 0.95．

如果测量值是 $X=3.133$，将 $\sigma=0.018$ 代入，得到

$$|3.133-\mu|\leqslant 1.96\times 0.018=0.035\,28.$$

上式发生的概率是 0.95．

小结与复习

4.1 随机对照试验： 随机选取试验组和对照组是安排试验的基本原则．随机对照试验是指随机选取试验组和对照组的试验．我们把对照组中的处理方法称为使用安慰剂．

4.2 事件的独立性： 如果事件 A_1，A_2，…，A_n 是相互独立的，则

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n).$$

4.3 列联表： 在许多实际问题中，经常需要考察两种因素之间的关系．列联表的独立性分析方法是检验所述的两个因素是否独立的有效方法．

4.4 回归直线： 当 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的相关系数 r_{xy} 的绝对值 $|r_{xy}|$ 较大时，可以用一条直线描述数据 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的关系，这条直线就是回归直线．用

$$l: y=bx+a$$

表示这条回归直线时，其中的 a，b 可以用下面的公式进行计算：

$$b=\frac{s_{xy}}{s_x^2}, \quad a=\bar{y}-b\bar{x}.$$

用回归直线进行预测：得到了回归直线后，只要 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 高度相关，即只要相关系数 $|r_{xy}|>0.8$，对于新的 x，就可以用回归直线上的点 $y=bx+a$ 作为 y 的预测值．事实证明：$|r_{xy}|$ 越接近于 1，预测就越准确；x 越接近 $\bar{x}$，预测也越好．

复习题四

学而时习之

1. 在对一种新的安眠药进行药效评价时，调查了 20 位开始使用这种药的人，结果有 16 人认为新药比常用药更有效。
   (1) 能否由此得出新药比常用药更有效的结论？
   (2) 如果不能作出上述结论，应当采用怎样的试验方案？
   (3) 如何安排对照组和试验组？
   (4) 本例中是否应当使用安慰剂？
2. 早在 70 多年前，美国通用电器公司成立了由社会学家和公司人事部成员组成的研究组，研究组的任务是考察照明程度对生产灯泡的工人的生产率有何影响。研究中发现，增加照明度后产量增加，但是奇怪的是降低照明度后，产量也增加，原因是（　　）。
   (A) 工人们对研究组的研究工作有了反应
   (B) 增加照明度确能提高生产率
   (C) 降低照明度确能提高生产率
3. 电视台在公布招聘多位节目主持人后，收到了 3 位符合条件人员的申请简历。根据以往的经验，每位符合条件的人员在面试时能够被录用的概率是 0.6。设每位申请者能否被录用是相互独立的，面试这 3 位申请者时，计算
   (1) 3 位申请者都被录用的概率；
   (2) 只有一位申请者被录用的概率。

温故而知新

4. 某广告声称一种新药的治疗有效率是 80 %，如果随机抽取的 5 个病人用药后都无效，能否认为广告不真实？
5. 下面是 1976 年至 1977 年美国佛罗里达州 20 个地区的人命案中被告是否被判死

刑的 326 个宣判结果．对于是否判死刑和被告的肤色是否有关进行独立性分析．（已知 $P(\chi^2 \geqslant 2.71)=0.1$．）

判刑 / 被告	死刑	非死刑	合计
白人	19	141	160
黑人	17	149	166
合计	36	290	326

上下而求索

6．每门高炮击中飞机的概率是 0.8，要以 99 % 的把握击中飞机，需要几门高炮？

7．某跳高运动员跳过 1.8 m 的概率是 $p=0.8$．不计每次试跳消耗的体能，计算

（1）他首次试跳成功的概率；

（2）第 3 次试跳才首次成功的概率；

（3）要以 99 % 的概率跳过 1.8 m，至少需要试跳多少次．

第5章 推理与证明

久病成医信不虚，庖丁解牛未足奇．
青山踏遍寻真谛，斗室神游识玄机．
力学定律通宇宙，几何公理贯中西．
有理有据走天下，文章千古叹神笔．

“推理与证明”是数学的基本思维过程，也是人们生活和学习中经常使用的思维方式．推理一般包括合情推理和演绎推理．本章将通过对已学知识的回顾，进一步体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异，体会数学证明的特点，了解数学证明的基本方法．

5.1 合情推理和演绎推理

合情推理（plausible reasoning）的意思是“合乎情理”的推理．在日常生活中，律师对案情的论证分析就是合情推理．数学中的合情推理有多种多样，最常见的就是归纳和类比．

5.1.1 归 纳

用手扔出的石子，它要掉下来．再扔一个玻璃球，它也要掉下来．再扔一个苹果，它还是要掉下来．我们会想到：不管扔的是什么东西，它都是要掉下来的；进一步去想这是为什么，想到最后，认为是由于地球有引力．但是，我们并没有把每件东西都扔上去试一试．试了若干次，就认为可以相信这是普遍规律．

在物理、化学、生物、医学等许多实验科学的研究中，用归纳推理来验证一条定律、一条假说是常有的事．理论对不对，用实验来验证．

农谚，“瑞雪兆丰年”，“东风一日晴”等，就是农民根据多年的实践经验进行归纳的结果．

像这样由一系列有限的特殊事例得出一般结论的推理方法叫作归纳（induction）．

归纳常常从观察开始．一个生物学家会观察鸟的生活，一个化学家会观察晶体的形状，一个数学家会观察数和形．

$1+3+5+7+9=5^2$

例 1 观察下列等式：

$$1=1^2,$$
$$1+3=2^2,$$
$$1+3+5=3^2,$$
$$1+3+5+7=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=5^2,$$
$$\cdots\cdots$$

通过对上面几个式子的观察，我们可以推测这样一个结论：“对任何正整数，等式 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 恒成立．”

例 2 探求凸多面体的面数、顶点数、棱数之间的关系（欧拉公

式的发现)．

欧拉曾观察一些特殊的多面体，如立方体、三棱柱、五棱柱、四棱锥、三棱锥、五棱锥、八面体、塔顶体（正方体上放一个四棱锥，如图 5－1(a))、截角立方体（图 5－1(b))等．我们将每个多面体的面数 F、顶点数 V、棱数 E 列成下表：

欧拉（Euler，1707—1783）瑞士数学家、物理学家．欧拉是数学史上最多产的数学家，研究涉猎广，人们把他称为“数学界的莎士比亚”．

多　面　体	面数（F）	顶点数（V）	棱数（E）
三棱锥	4	4	6
方（四）棱柱	5	5	8
三棱柱	5	6	9
五棱锥	6	6	10
立方体	6	8	12
八面体	8	6	12
五棱柱	7	10	15
截角立方体	7	10	15
塔顶体	9	9	16
二十面体	20	12	30
十二面体	12	20	30
有 n 个侧面的棱柱	$n+2$	$2n$	$3n$
有 n 个侧面的棱锥	$n+1$	$n+1$	$2n$
多面体多棱锥顶形	$F+n+1$	$V+1$	$E+n$
多面体截 n 棱角形	$F+1$	$V+n+1$	$E+n$

运用归纳推理的一般步骤为：首先，通过观察特例发现某些共性或一般规律；然后，把这种共性推广为一般命题（猜想）；最后，对所得出的一般性命题进行验证．

塔顶体
(a)

截角立方体
(b)

图 5－1

首先考虑特殊的多面体的面数、顶点数与棱数，并思考如下问题：

（1）面数是否随着顶点数目的增大而增大？否．（如塔顶体与截

角立方体。)

(2)棱数是否随着面数或顶点数的增大而增大?否。(如八面体与五棱柱,塔顶体与截角立方体。)

进一步考虑,尽管 F 和 V 均非始终如一地随着 E 的增大而增大,但总趋势似乎是增大的,即 $F+V$ 是在不断增大的。那么是否有“任何多面体的面数加顶点数与棱数有同增趋势”?

由表中数据可知成立:

$$V+F-E=2.$$

从而,欧拉得出猜想:任意多面体的面数 F、顶点数 V、棱数 E 满足:

$$V+F-E=2$$

后来欧拉证明了这个猜想是正确的,这就是著名的欧拉公式.

用归纳推理可以帮助我们从具体事例中发现一般规律.但是应该注意,仅根据一系列有限的特殊事例所得出的一般结论不一定可靠,只是一种合情推理,其结论正确与否,还需要经过理论的证明和实践的检验.

例 3 设 $f(x)=x^2+x+11$,取 $x=1, 2, 3, \cdots, 9$,则

$f(1)=13$,$f(2)=17$,$f(3)=23$,

$f(4)=31$,$f(5)=41$,$f(6)=53$,

$f(7)=67$,$f(8)=83$,$f(9)=101$.

可以看出,这些值都是质数.

从这些特殊情况似乎可以归纳出:当 x 为正整数时,$f(x)=x^2+x+11$ 的值都是质数.但经过进一步检验却发现这个结论是错误的.

事实上,当 $x=10$ 时,$f(10)=10^2+10+11=121$,这是个合数.

尽管由归纳推理所得的结论未必是可靠的,还需要进一步检验.但它由特殊到一般、由具体到抽象的认识功能,对于科学的发现却是十分有用的.观察、实验,对有限的资料作归纳整理,提出猜想,乃是科学研究的最基本的方法之一.

多知道一点

哥德巴赫猜想

观察

$$6=3+3,$$
$$8=3+5,$$
$$10=3+7=5+5,$$
$$12=5+7,$$
$$14=3+11=7+7,$$
$$16=3+13=5+11,$$
……

归纳猜想：任何一个大于 4 的偶数都可以表示成两个奇素数之和．这就是著名的哥德巴赫猜想，这个猜想至今没有得到证明．

练　习

1. 右边所示的三角形数组是我国古代数学家杨辉发现的，称为杨辉三角形．根据图中的数构成的规律，a 所表示的数是________．

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad a \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

2. 观察下列等式：

$$1^3=1^2,$$
$$1^3+2^3=3^2,$$
$$1^3+2^3+3^3=6^2,$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2,$$
……

想一想，等式左边各项幂的底数与右边幂的底数有什么关系？猜一猜可以引出什么规律．

习题 1

学而时习之

1. 等比数列的通项公式.

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比是 q，那么

$a_2=a_1q$，

$a_3=a_2q=a_1q^2$，

$a_4=a_3q=a_1q^3$，

……

由此，猜想等比数列的通项公式是 $a_n=$________.

2. 下列各列数都是依照一定的规律排列，在括号里填上适当的数.

(1) 1，5，9，13，17，(　　)；

(2) $\frac{2}{3}$，1，$1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{3}{8}$，(　　).

3. 如图 5－2，图(a)是棱长为 1 的小正方体，图(b)，图(c)是由这样的小正方体摆放而成. 按照这样的方法继续摆放，自上而下分别叫第 1 层，第 2 层，…，第 n 层. 第 n 层的小正方体的个数记为 S_n. 解答下列问题.

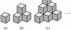


图 5－2

(1) 按照要求填表.

n	1	2	3	4	…
S_n	1	3	6		…

(2) $S_{10}=$________. (3) $S_n=$________.

温故而知新

4．求凸 n 边形的内角和．

5．(1) 图 5－3 中 (a)、(b)、(c)、(d) 为四个平面图．数一数，每个平面图各有多少个顶点？多少条边？它们围成了多少个区域？请将结果填入下表．

图 5－3

	顶点数	边　数	区域数
(a)	4	6	3
(b)			
(c)			
(d)			

(2) 观察上表，推断一个平面图的顶点数、边数、区域数之间有什么关系．

(3) 现已知某个平面图有 999 个顶点，且围成了 999 个区域，试根据以上关系确定这个图有多少条边．

5.1.2 类 比

传说木工用的锯子是鲁班发明的．有一天鲁班到山上去，手指突然被一根丝毛草划了一下，划破了一道口子．他想，一根小草怎么会这样厉害呢？鲁班仔细一看，发现草叶子的边缘生着许多锋利的小齿．鲁班立即想到，如果照着丝毛草叶子的模样，用铁片打制一把带利齿的工具，用它在树上来回拉，不就可以很快地将树割断吗？回去后他马上打了一把这样的工具，这就是锯子．

聪明的鲁班在这里所使用的推理方法称为类比（analogy）．类比是根据两个不同的对象在某方面的相似之处，推测出这两个对象在其他方面也可能有相似之处．如根据带齿的草叶与带齿的铁片结构相似，由前者能划破手指，推出后者能割断树木．例如，代数中根据分式与分数都具有分子、分母这个相同的形式，从而推出分式具有分数相似的性质，分式可以如分数一样进行化简和运算，这就是类比．

这种仿照生物机制的类比，到了近代，便发展成了一门新兴的学科，即所谓近代仿生学，例如，潜水艇的设计思想来自鱼类在水中浮沉之生物机制的类比．

类比是一种相似，即类比的对象在某些部分或关系上的相似．在文学艺术与科学研究中都充满了类比．类比用得好，在文学作品中可使文章大为生色，在科学研究中可引出新的发现．

例 1 长方形和长方体，如图 5－4 所示．

图 5－4

“问君能有几多愁，恰似一江春水向东流．”（李煜）用的就是类比．

长方形的每一边恰与对边平行，而与其余的边垂直．

长方体的每一面恰与对面平行，而与其余的面垂直．

这两种几何图形间可以建立类比关系，如下表所示．

长 方 形	长 方 体
每相邻两边互相垂直	每相邻两棱互相垂直 每相邻两面互相垂直
对边互相平行	对棱互相平行
对边长度相等	对棱长度相等

我们在学习立体几何时常常可以类比平面几何，将在平面几何中成立的结论进行推广，得到许多类似的结论．

续表

长方形	长方体
对角线相等	对角线相等
对角线互相平分	对角线互相平分
对角线的平方等于长与宽的平方和	对角线的平方等于长、宽、高的平方和
面积等于长与宽的乘积 $S=ab$	体积等于长、宽、高的乘积 $V=abc$

例 2 著名的欧姆定律就是德国物理学家欧姆在 1826 年把电传导系统与热传导系统作类比而导出的. 电流 I 与热量 Q 相当，电压 V 同温差 ΔT 相当，电阻 R 与比热 c 的倒数相当.

电传导系统	热传导系统
I（电流）	Q（热量）
V（电压）	ΔT（温差）
R（电阻）	$\frac{1}{c}$（比热的倒数）

在热传导系统中有关系式：

$$Q=mc\Delta T\text{（}m\text{ 是质量）}.$$

于是，就可猜想在电传导系统中有关系式：

$$I=\frac{1}{R}V.$$

这就是欧姆定律.

例 3 医药试验不宜直接在人体上进行. 老鼠、猴子与人在身体结构上具有类似之处，于是，有理由相信，在这些动物身上的试验结果类似于在人体上试验的结果.

练 习

线段、三角形与四面体，如图 5－5 所示.

线段是直线（一维空间）上的最简单的封闭图形，它由两点围成.

三角形是平面（二维空间）上的最简单的封闭图形，它由三条直线围成；在平

面上两条直线围不成封闭图形.

四面体是空间（三维空间）上的最简单的封闭图形，它由四张平面围成；在空间三张平面围不成封闭图形.

图 5－5

这三种图形之间可以作类比，这种类比是在不同维数的空间中进行的.

如果我们把线段叫 1 维单形，三角形叫 2 维单形，四面体叫 3 维单形，那么单形的概念可以推广到高维空间中去了，例如我们可以考虑 4 维单形、5 维单形，等等.

习题 2

学而时习之

1．平面上的圆与空间中的球的类比.

平面几何中的概念	立体几何中的类似概念
圆	球
圆的切线	球的切面
圆的弦	球的截面圆
圆的周长	球的表面积
圆的面积	球的体积

圆的性质	球的性质
圆心与弦（非直径）中点的连线垂直于弦	球心与截面圆（不经过圆心的小截面圆）圆心的连线垂直于截面圆
与圆心距离相等的两弦相等；与圆心距离不等的两弦不等；距圆心较近的弦较长	与球心距离相等的两个截面圆相等；与球心距离不等的两个截面圆不等；距球心较近的截面圆较大
……	……

温故而知新

2．将椭圆与双曲线相应概念、性质作类比，填写下表．

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
对称性（x 轴、y 轴、原点）	对称性
焦点（$\pm c$，0），$c=\sqrt{a^2-b^2}$	焦点
离心率 $e=\frac{c}{a}<1$	离心率
准线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$	准线
长轴 $2a=\frac{2ep}{1-e^2}$	长轴
短轴 $2b=\frac{2ep}{\sqrt{1-e^2}}$	短轴
椭圆上一点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$	双曲线上一点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程

3．判断下列推理是否正确．

类比与归纳一样，也是一种合情推理，其结论正确与否，必须经过严格的证明．

（1）把 $a(b+c)$ 与 $\log_a(x+y)$ 类比，则有：

$$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y.$$

（2）把 $a(b+c)$ 与 $\sin(x+y)$ 类比，则有：

$$\sin(x+y)=\sin x+\sin y.$$

（3）把 $(ab)^n$ 与 $(a+b)^n$ 类比，则有：

$$(a+b)^n=a^n+b^n.$$

5.1.3 演绎推理

演绎推理(deduction inference)与归纳推理的过程相反，它是从一般到特殊的推理．

演绎推理的主要形式就是由大前提、小前提推出结论的三段论式推理．

例 1 大前提：马有四条腿；

小前提：白马是马；

结　论：白马有四条腿.

这是三段论式推理常用的一种格式，可以用以下公式来表示：

$$M-P(M\text{是}P),$$

$$\frac{S-M(S\text{是}M)}{S-P(S\text{是}P)}.$$

三段论的公式中包含三个判断：

第一个判断称为大前提，它提供了一个一般的事实或道理；

第二个判断称为小前提，它指出了一个特殊情况；

这两个判断联合起来揭示了一般事实或道理和特殊情况的内在联系，从而产生了第三个判断——结论.

演绎推理是一种必然性推理，演绎推理的前提与结论之间有蕴涵关系. 因而，只要大前提、小前提都是真实的，推理的形式是正确的，那么结论必是真实的. 但错误的前提可能导致错误的结论.

三段论推理的根据，用集合的观点来讲，就是：若集合 M 的所有元素都具有性质 P，S 是 M 的子集，那么 S 中所有元素都具有性质 P.

数学理论都是用演绎推理组织起来的. 每一个数学理论都是一个演绎体系，最典型的例子就是欧几里得几何，它是建立在五组公理之上的演绎体系.

例 2 用三段论证明：

直角三角形两锐角之和为 90°.

证明 因为任意三角形三内角之和为 180°，（大前提）

而直角三角形是三角形，（小前提）

所以直角三角形三内角之和为 180°.（结论）

设直角三角形两锐角为 α 和 β，则上面结论可表示为

$$\alpha+\beta+90^\circ=180^\circ.$$

因为等量减等量差相等，（大前提）

而 $(\alpha+\beta+90^\circ)-90^\circ=180^\circ-90^\circ$ 是等量减等量，（小前提）

所以 $\alpha+\beta=90^\circ$ 成立.（结论）

这里用了两次三段论进行推理，在数学中有时要用很多次的三段论来证明一个命题. 数学命题的证明过程就是一连串三段论的有序组合. 只是为了简洁，往往略去大前提或小前提，甚至有的大前提、小前提全省略. 如

完整式：

一切直角都相等，（大前提）

这两个角是直角，（小前提）

所以，这两个角相等.（结论）

省略式：

因为这两个角是直角，（小前提）

所以这两个角相等.（结论）

或省略式：

两个直角相等.（结论）

例 3 设 B_k 是 $(a+1)^n$ 的展开式中 a^k 的系数（$k=0, 1, \cdots, n$），

求证：$B_0+B_1+\cdots+B_n=2^n$.

证明 由假设可知

$(a+1)^n=B_0+B_1a+B_2a^2+\cdots+B_na^n$，（大前提）

取 $a=1$，（小前提）

即得

$$2^n=B_0+B_1+\cdots+B_n.$$

练 习

用三段论证明：矩形的两条对角线互相平分.

习题 3

学而时习之

把下列各个推理还原成三段论.

1. 因为 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 是等腰 $\triangle ABC$ 的两底角，

所以$\angle ABC=\angle ACB$.

2. A，B，C 三点可以确定一个圆，因为它们不在同一直线上.

3. 一圆周角所对的弦是直径，则它是一直角.

温故而知新

用三段论证明：

4. 如果两条直线都和第三条直线垂直，那么，这两条直线平行.

5.1.4 合情推理与演绎推理的关系

古希腊亚历山大城有一位久负盛名的学者——海伦（Heron，约 1 世纪），有一天，一位远道而来的将军向他请教一个问题：

海伦，古希腊数学家、物理学家、天文学家，他发现了光学中的反射定律.

从 A 地出发到河边饮完马再到 B 地去，在河边哪个地方饮马可使路途最短？如图 5－6.

图 5－6

海伦巧妙地类比光的反射原理给出了下面的解法：

要解决的问题是：如何在 MN 上选出一个点 P，使 $AP+BP$ 最短.

用合情推理的方法设想答案：从 A 到直线上一点 P，再从 P 到 B 恰似光线的反射，因为光走最短路线，由此猜想，最短路线应该像光的反射线.

用合情推理构思证明：如果把 MN 看成镜子，把点 B 看作一只眼睛，从镜子里看点 A 的像点 A'，点 A'应该在镜子的背后，并且点

A'在 BP 的延长线上.

由此先作点 A 关于 MN 的对称点 A'，连接 BA'，交 MN 于 P，点 P 即为所求.

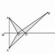


图 5-7

用演绎法证明如下：

如图 5-7 所示，在 MN 上任取一点 P'（异于点 P），则 $AP'=P'A'$，$AP=PA'$，从而

$$AP'+P'B=A'P'+P'B>A'P+PB=AP+PB.$$

由此可知：A 到 B 经 P 点距离最短.

在探索自然规律时，首先要确定一个目标，或者提出一个要解决的问题；然后通过日常的实践、分析和合情推理，总结出一个预期的解决方案或猜想；最后还需对此猜想作出严格的证明. 证明的过程中则需要按演绎推理的规则进行，证明完前一步，下一步又该如何演绎，仍需依靠合情推理提供思路，直至完成全部证明.

G.波利亚曾指出：“数学的创造过程是与其他知识的创造过程一样的，在证明一个定理之前，你先得猜想这个定理的内容，在你完全作出详细的证明之前，你先得猜想证明的思路. 你要先把观察到的结果加以综合，然后加以类比，你得一次又一次地尝试. 数学家的创造性成果是论证推理（演绎推理），即证明. 但这个证明是通过合情推理，通过猜想而发现的.”

5.2 直接证明与间接证明

5.2.1 直接证明：分析法与综合法

"走迷宫"游戏要求人们从入口处走到迷宫的出口处，人们习惯于"顺推"，即从"入口"开始依次在各个岔口来回试探，碰壁后再调整路线，这样反复试探，最终可以找到"出口"．如果倒过来走，即从"出口"倒推到"入口"，有时更容易办到．

在数学证明中，就有这样的两种方法：一种是由已知走向求证，即从数学题的已知条件出发，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证结论或需求的问题，称为**综合法**（synthesis method）；另一种则是反过来，由求证走向已知，即从数学题的待证结论或需求问题出发，一步一步地探索下去，最后达到题设的已知条件，称为**分析法**（analysis method）．综合法和分析法是直接证明的两种基本方法．

综合法的由因导果，有如从长江源头顺流而下，一直到达上海的长江口；

分析法的执果索因，有如从上海沿长江逆流而上去寻找长江的源头．

例 1 如图 5－8，平行四边形 $ABCD$ 中，$AE \perp BD$ 于 E，$CF \perp BD$ 于 F．

求证：$AE=CF$．

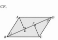


图 5－8

证法一 综合法．

$$\left.\begin{array}{l}\text{平行四边形 } ABCD \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}AB=CD \\ AB /\!/ DC \Rightarrow \angle 1=\angle 2\end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l}AE \perp BD \\ CF \perp BD\end{array}\right\} \Rightarrow \angle AEB=\angle CFD=90^{\circ}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\triangle ABE \cong \triangle CDF \Rightarrow AE=CF.$$

证法二 分析法.

要证 $AE=CF$ 成立，由于 AE，CF 分别是$\triangle ABD$ 与$\triangle CBD$ 的高，而全等三角形对应高相等.

故只需证$\triangle ABD\cong\triangle CBD$.

由题设，平行四边形 $ABCD$ 中，有 $AB=CD$，$AD=BC$，$BD=BD$，从而$\triangle ABD\cong\triangle CBD$ 成立，

由此，命题得证.

从上例可以看出，分析法的特点是：从“未知”看“需知”，执果索因，逐步靠拢“已知”. 其逐步推理，实际上是要寻找它的充分条件. 综合法的特点是：从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”，由因导果，其逐步推理，实际上是寻找它的必要条件.

例 2 求证：$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

分析 用综合法不太容易想到解决这类问题的途径，所以用分析法探求证明途径.

证法一 分析法.

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}\\ \Leftarrow\ &(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2\\ \Leftarrow\ &9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}\\ \Leftarrow\ &\sqrt{14}<\sqrt{18}\\ \Leftarrow\ &14<18.\end{aligned}$$

最后一个不等式成立，故原不等式成立.

基于上述分析法的证明，我们还可以给出例 2 的综合法证明.

证法二 综合法.

$$\begin{aligned}&14<18,\\ \Rightarrow\ &\sqrt{14}<\sqrt{18},\\ \Rightarrow\ &9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18},\\ \Rightarrow\ &(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2.\end{aligned}$$

因为$\sqrt{2}+\sqrt{7}>0$，$\sqrt{3}+\sqrt{6}>0$，所以$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

在上例中，我们很难想到从“$14<18$”入手，用综合法比较困

难．因此先用分析法探索证明的途径，然后用综合法的形式写出证明过程，这是解决数学问题的一种常用方法．

有时也将综合法、分析法结合起来，就好像有两个人，一个人从入口走向迷宫的出口，一个人从迷宫出口走向入口，争取在某处相会．

练习

分别用综合法与分析法证明：

两个不相等的正数的算术平均数大于它们的几何平均数．

习题 4

学而时习之

分别用综合法与分析法证明：

1．如图 5－9，在平行四边形 $ABCD$ 中，$BM=MC$，$AN=ND$．

求证：$BE=EF=FD$．

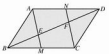


图 5－9

2．如果 x 为实数，那么 $\frac{x^2}{1+x^4}\leq\frac{1}{2}$．

温故而知新

分别用综合法与分析法证明：

3．如图 5－10，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AE\perp BD$ 于 E，$CF\perp BD$ 于 F．

求证：$AECF$ 是平行四边形．

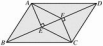


图 5－10

4．求证：$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$．

5.2.2　间接证明：反证法

间接证明不是从正面确定论题的真实性，而是证明它的反论题为假，或改证它的等价命题为真，以间接地达到目的．反证法是间接证明的一种基本方法．

例 1　在初中数学中我们学习过直线的性质："两条直线相交，只有一个交点"．下面我们给出证明：

若两直线不只有一个交点，如有两个交点 C，C'（如图 5－11），则经过此两点便有两条直线．这与"经过两点有且只有一条直线"的公理矛盾，故原命题成立．

图 5－11

成语故事："自相矛盾"中，"以子之矛攻子之盾"，正是采用了反证法．

上述证明没有从原命题的已知条件出发去推出结论，而是先假设原命题的否定成立，从这个假设出发，经过推理，得出与已知事实（例 1 是与公理）相矛盾的结果，这个矛盾的结果说明原命题结论的否定不成立，从而间接肯定了原命题结论成立．像这样一种间接证法，称为反证法（reduction to absurdity）．

学习反证法应把握它的一般步骤：

（1）反设：假设所要证明的结论不成立，而设结论的反面成立；

（2）归谬：由“反设”出发，通过正确的推理，导出矛盾——与已知条件、已知的公理、定义、定理、反设及明显的事实矛盾或自相矛盾；

（3）结论：因为推理正确，产生矛盾的原因在于“反设”的谬误，既然结论的反面不成立，从而肯定了结论成立.

这相当于增加了一个已知条件，无异于雪中送炭！

运用反证法的关键在于导出矛盾.

例 2 求证：$\sqrt{2}$是无理数.

无理数$\sqrt{2}$的发现，在历史上比负数还要早，它是伴随着勾股定理的发现而被发现的，这要归功于古希腊的毕达哥拉斯学派，可用反证法证明如下：

反设 假设$\sqrt{2}$是有理数，不妨设$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$（p，q 为互质的正整数）.

归谬 由反设有$\sqrt{2}p=q\Rightarrow q^2=2p^2$，故 2 必是 q 的因数，于是可设 $q=2m$（m 为正整数）$\Rightarrow 2p^2=4m^2$，所以 $p^2=2m^2$，故 2 又是 p 的因数，因此 p，q 有公因数 2，这与 p，q 为互质的正整数相矛盾.

结论 假设$\sqrt{2}$是有理数不成立，故$\sqrt{2}$是无理数.

在应用反证法证题时，必须按“反设—归谬—结论”的思路进行，这就是应用反证法的三步曲，但叙述上可以简略每一步的名称.

多知道一点

伽利略妙用反证法

1589 年，意大利 25 岁的科学家伽利略，为了推翻古希腊哲学家亚里士多德的“不同重量的物体从高空下落的速度与其重量成正比”的错误论断，他除了拿两个重量不同的铁球登上著名的比萨斜塔当众

做实验来说明外，还运用了反证法加以证明：

假设亚里士多德的论断是正确的．设有物体 A，B，且 $A_{重}>B_{重}$，则 A 应比 B 先落地．现把 A 与 B 捆在一起成为物体 $A+B$，则 $(A+B)_{重}>A_{重}$，故 $A+B$ 比 A 先落地；又因 A 比 B 落得快，A，B 在一起时，B 应减慢 A 的下落速度，所以 $A+B$ 又应比 A 后落地．这样便得到了自相矛盾的结果．这个矛盾之所以产生，是由亚里士多德的论断所致，因此这个论断是错误的．

练 习

求证：在同一平面内，一条直线与两条平行线中的一条相交，则也必与另一条相交．

习题 5

学而时习之

1．求证：在同一平面内，同一条直线的垂线与斜线必相交．

2．已知 a，b，c，d 为实数，$a+b=1$，$c+d=1$，且 $ac+bd>1$．求证：a，b，c，d 中至少有一个是负数．

温故而知新

3．已知直线 a，b，c，其中 a，b 是异面直线，$c//a$，b 与 c 不相交．求证 b，c 是异面直线．

4．若 p，q 是奇数，则方程 $x^2+px+q=0$ 不可能有整数根．

小结与复习

一、指导思想

"推理与证明"是数学的基本思维过程，也是人们生活和学习中经常使用的思维方式．推理一般包括合情推理和演绎推理．

证明通常包括逻辑证明和实验、实践证明．数学结论的正确性必须通过逻辑证明来保证，即在前提正确的基础上，通过正确使用推理规则得出结论．

在本章中，通过对已学知识的回顾，进一步体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异；体会数学证明的特点，了解数学证明的基本方法，包括直接证明和间接证明的方法；感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的习惯．通过本章的学习，开发灵性，掌握方法，深入到数学的精髓．

二、内容提要

1．合情推理与演绎推理．

合情推理是根据已有的事实和正确的结论（包括实验和实践的结果），以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程．归纳、类比是合情推理常用的思维方法．在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新意识的培养．演绎推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），按照严格的逻辑法则得到新结论的推理过程．培养和提高演绎推理或逻辑证明的能力是高中数学课程的重要目标．合情推理和演绎推理之间联系紧密，相辅相成．

（1）归纳．

归纳是从个别事实中概括出一般原理的一种推理模式．

归纳有以下几个特点：

①归纳是依据特殊现象推断一般现象，因而，由归纳所得的结论超越了前提所包容的范围；

②归纳是依据若干已知的、没有穷尽的现象推断尚属未知的现象，因而结论具有猜测的性质；

③归纳的前提是特殊的情况，所以归纳是立足于观察、经验或实验的基础上的.

（2）类比.

类比是在两类不同的事物之间进行对比，找出若干相同或相似点之后，推测在其他方面也可能存在相同或相似之处的一种推理模式.

类比有以下几个特点：

①类比是从人们已经掌握了的事物的属性，推测正在研究中的事物的属性，它以旧有认识作基础，类比出新的结果；

②类比是从一种事物的特殊属性推测另一种事物的特殊属性；

③类比的结果是猜测性的，不一定可靠，但它却具有发现的功能.

在运用类比推理时，其一般步骤为：首先，找出两类对象之间可以确切表述的相似性（或一致性）；然后，用一类对象的性质去推测另一类对象的性质，从而得出一个猜想；最后，检验这个猜想.

（3）演绎推理.

演绎推理是由一般性的命题推出特殊性命题的一种推理模式.

演绎推理的主要形式，就是由大前提、小前提推出结论的三段论式推理. 三段论式推理常用的一种格式，可以用以下公式来表示：

$$M—P(M\text{ 是 }P),$$

$$\frac{S—M(S\text{ 是 }M)}{S—P(S\text{ 是 }P)}.$$

三段论推理的根据，用集合论的观点来讲，就是：若集合 M 的所有元素都具有性质 P，S 是 M 的子集，那么 S 中所有元素都

具有性质 P.

三段论的公式中包含三个判断：第一个判断称为大前提，它提供了一个一般的事实或道理；第二个判断叫小前提，它指出了一个特殊情况；这两个判断联合起来，揭示了一般事实或道理和特殊情况的内在联系，从而产生了第三个判断——结论.

2. 直接证明与间接证明.

（1）直接证明：分析法与综合法.

分析法是一种从结果追溯到产生这一结果的原因的思维方法，而综合法则是从原因推导到由原因产生的结果的思维方法. 具体地说，分析法是从数学题的待证结论或需求问题出发，一步一步地探索下去，最后达到题设的已知条件；综合法是从数学题的已知条件出发，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证结论或需求问题.

（2）间接证明：反证法.

对于反证法，法国数学家 J. 阿达玛（Hadamard，J. S.）这样说过："反证法在于表明：若肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾."这是对反证法极好的概括.

反证法证题的一般步骤：

①反设：假设所要证明的结论不成立，而设结论的反面成立；

②归谬：由"反设"出发，通过正确的推理，导出矛盾——与已知条件、已知的公理、定义、定理、反设及明显的事实矛盾或自相矛盾；

③结论：因为推理正确，产生矛盾的原因在于"反设"的谬误，既然结论的反面不成立，从而肯定了结论成立.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求.

（1）结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理的含义，能利用归纳和类比等进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用.

（2）结合已学过的数学实例和生活中的实例，体会演绎推理的

重要性，掌握演绎推理的基本模式，并能运用它们进行一些简单推理.

（3）通过具体实例，了解合情推理和演绎推理之间的联系点和差异.

（4）结合已经学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法——分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程及特点.

（5）结合已经学过的数学实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点.

2. 需要注意的问题.

（1）应通过实例，运用合情推理去探索、猜测一些数学结论，并用演绎推理确认所得结论的正确性，或者用反例推翻错误的猜想. 重点在于通过学习具体实例理解合情推理与演绎推理，而不追求对概念的抽象表述.

（2）要认识到观察、归纳、类比、猜想、证明是相互联系的，在数学学习中综合运用它们. 在探讨某些问题时，可以先从观察入手，发现问题的特点，形成解决问题的初步思路；然后用归纳、类比方法进行试探，提出猜想；最后用逻辑推理方法（例如数学归纳法）去进行推证，以检验所提出的猜想.

（3）本章中设置的证明内容是对已学过的基本证明方法的总结，应通过学习实例，认识各种证明方法的特点，体会证明的必要性. 对证明的技巧性不作过高的要求.

四、参考例题

例 1　在平面上有 n 条直线，任何两条都不平行，并且任何三条都不交于同一点，问这些直线把平面分成多少部分？

解　设 n 条直线分平面为 S_n 部分，先实验观察特例有如下结果：

n	1	2	3	4	5	6	…
S_n	2	4	7	11	16	22	…

n 与 S_n 之间的关系不太明显，但 S_n-S_{n-1} 有如下关系：

n	1	2	3	4	5	6	…
S_n	2	4	7	11	16	22	…
S_n-S_{n-1}		2	3	4	5	6	…

观察上表发现如下规律：$S_n-S_{n-1}=n(n=2,3,\cdots)$.

这是因为在 $n-1$ 条直线后添加第 n 条直线被原 $n-1$ 条直线截得的 n 段中的任何一段都将它所在的原平面一分为二，相应地增加 n 部分，所以 $S_n=S_{n-1}+n$，即 $S_n-S_{n-1}=n$. 从而 $S_2-S_1=2$，$S_3-S_2=3$，$S_4-S_3=4$，…，$S_n-S_{n-1}=n$. 将上面各式相加有

$$S_n-S_1=2+3+\cdots+n.$$

所以 $S_n=S_1+2+3+\cdots+n=2+2+3+\cdots+n$

$$=1+(1+2+\cdots+n)=1+\frac{1}{2}n(n+1).$$

注 S_n 也可由如下观察发现，由上表知：$S_1=1+1$，$S_2=1+1+2$，$S_3=1+1+2+3$，$S_4=1+1+2+3+4$，依此类推，便可猜想到

$$S_n=1+1+2+3+\cdots+n=1+\frac{1}{2}n(n+1).$$

例 2 费马大定理.

我国早在商周时代（约公元前 1100 年）就已经知道了不定方程：

$$x^2+y^2=z^2$$

至少有一组正整数解：$x=3$，$y=4$，$z=5$.

法国数学家费马（Fermat，1601—1665）在阅读古希腊数学家丢番图的《算术》一书的第Ⅱ卷第 8 命题“将一个平方数分为两个平方数的和”时，他想到了更一般的问题，费马在页边空白处写下了如下的一段话：

“将一个立方数分为两个立方数的和，一个四次方数分为两个四次方数的和，或者一般地将一个 n 次方数分为两个同次方数的和，这是不可能的．关于此，我确信已找

到了一个真正奇妙的证明，可惜这儿的空白太小，写不下。"

这段叙述用现代数学语言来说，就是

"当整数 $n>2$ 时，方程

$$x^n+y^n=z^n$$

没有正整数解".

这就是著名的费马大定理．这个结论费马认为可以证明，但并没有给出证明过程．这个困惑了世间智者 357 年的猜想，终于在 1994 年获证．

复 习 题 五

学而时习之

1．等差数列的通项公式．

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d，那么

$$a_1=a_1+0d,$$

$$a_2=a_1+d=a_1+1d,$$

$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=a_1+3d,$$

……

由此，猜想等差数列的通项公式是 $a_n=$__________．

2．观察下面的几个算式，找出规律：

$$1+2+1=4$$

$$1+2+3+2+1=9$$

$$1+2+3+4+3+2+1=16$$

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=25$$

……

利用上面的规律，请你迅速算出：$1+2+3+\cdots+99+100+99+\cdots+3+2+1=$__________.

3. 如图 5－12 所示，由火柴杆拼成的一列图形中，第 n 个图形由 n 个正方形组成. 通过观察可以发现：第 4 个图形中，火柴杆有____根；第 n 个图形中，火柴杆有____根.

图 5－12

4. 观察图 5－13 中各正方形图案，每条边上有 $n(n\geq 2)$ 个圆点，第 n 个图案中圆点的总数是 S_n.

图 5－13

按此规律推断出 S_n 与 n 的关系式为________.

5. 用三段论证明：

在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AB=DC$. 求证：$\angle B=\angle C$.

6. 用综合法证明：

若 a，b，c 为不全相等的三个正实数，则

$$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$$

7. 分别用分析法、综合法和反证法证明：$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$.

8. 用反证法证明：

若 $a>b>0$，n 为正整数，且 $n\geq 2$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

温故而知新

9. 四个小动物换座位，开始是鼠、猴、兔、猫分别坐 1，2，3，4 号位上（如图

5－14)，第一次前后排动物互换座位，第二次左右列动物互换座位，…，这样交替进行下去，那么第 2 005 次互换座位后，小兔坐在第________号座位上.

开始	第一次	第二次	第三次
1 鼠 2 猴	1 兔 2 猫	1 猫 2 兔	1 猴 2 鼠
3 兔 4 猫	3 鼠 4 猴	3 猴 4 鼠	3 猫 4 兔

图 5－14

10. 分别用分析法、综合法和反证法证明：

若 a，b 为正数，且 $a\neq b$，则 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

11. 圆内两条非直径的弦相交，试证它们不能互相平分.

12. 设 C_n^k 是 $(x+y)^n$ 的展开式中 x^ky^{n-k} 项的系数，用三段论证明：

(1) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$；

(2) $C_n^0(1-x)^n+C_n^1x(1-x)^{n-1}+C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_n^nx^n=1$.

13. 用三段论证明：

若 a 是不等于 1 的实数，则函数 $y=\frac{x-a}{ax-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

14. 已知数列：

$$\frac{1}{1\times2},\ \frac{1}{2\times3},\ \frac{1}{3\times4},\ \cdots,\ \frac{1}{n(n+1)},\ \cdots$$

S_n 为其前 n 项和，计算 S_1，S_2，S_3，由此推测计算 S_n 的公式，并给出证明.

15. 将直角三角形与直四面体进行类比，把勾股定理推广到三维空间的形式.

上下而求索

16. 已知正三角形内任一点 P 到三条边的距离之和等于三角形的高. 我们可以猜测正四面体内任意一点 P 到四个面的距离之和等于多少？并给出证明.

17. (角谷猜想，也称 $3x+1$ 问题.)

任取一个大于 2 的自然数，反复进行下述两种运算：

(1) 若是奇数，就将该数乘以 3 再加上 1；

(2) 若是偶数，则将该数除以 2.

例如，对 3 反复进行这样的运算，有

$$3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1.$$

对 4，5，6 反复进行上述运算，其最终结果也都是 1，再对 7 进行这样的运

算，有

$$7\to22\to11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1.$$

运用归纳推理建立猜想（通常称为“角谷猜想”）：从任意一个大于 2 的自然数出发，反复进行（1）、（2）两种运算，最后必定得到 1. 这个猜想后来被人们多次检验，发现对 7 000 亿以下的数都是正确的，究竟是否对大于 2 的一切自然数都正确，至今还不得而知.

数学文化

公理化思想对人类文化的影响

公理化思想产生阶段是由亚里士多德的完全三段论到欧几里得《几何原本》的问世.

公元前3世纪，哲学家和逻辑学家亚里士多德从理论上全面阐述了公理与演绎思想，总结了前人所发现和创立的逻辑知识，以完全三段论为出发点，用演绎的方法推导出其余19个不同格式的所有三段论，从而创立了人类历史上第一个公理化方法.

1．欧几里得的《几何原本》.

数学家欧几里得将逻辑公理演绎方法应用于几何学，于公元前300年完成了数学史上的划时代著作《几何原本》.《几何原本》是有史以来用公理化思想方法建立起来的第一门演绎数学，而且成为以后2 000多年严格证明的典范．书中开篇便给出五条公理：

（1）等于同一个量的量彼此相等；

（2）等量加等量其和相等；

（3）等量减等量其差相等；

（4）互相重合的量彼此相等；

（5）全体大于部分.

同时给出关于几何的五条公设：

（1）从每个点到每个别的点可以引直线；

（2）有限的直线可以沿直线连续地延长；

（3）以任一点为中心可以用任意半径画圆；

（4）所有直角都相等；

（5）如果一条直线与另外两条直线相交，在一侧构成两个同侧内角之和小于两直角，那么这两条直线无限延长时，就在同侧内角

和小于两直角的那一侧相交.

在《几何原本》中欧几里得还给出了119个定义，书中共有465个命题皆由定义、公理与公设出发，用正确的逻辑推理逐一证明出来（前面已证得的结论后面可以当已知来用）。他的这种数学系统开创了公理系统的先河，这种公理化的数学有不少优点，论证有根有源，使思维经济有效，便于本学科知识的系统化和逻辑上的严格化，便于该学科的传播等等.

公理化方法就是选择尽可能少的原始概念和一组公理作为出发点，采用逻辑推理的法则，将一门科学建立成演绎系统的一种方法。现代公理系统不仅要求有上述原始概念和原始命题，而且要求这些原始命题具有独立性、相容性、完备性.

2. 牛顿力学体系的公理化展开方式.

牛顿力学体系是一个公理化的演绎系统，这在牛顿的《自然哲学的数学原理》（以下简称《原理》）一书中有清晰的表述.《原理》是一部划时代的科学巨著，是按照公理化方法写成的一本力学著作.

《原理》在一开始的“说明”与“附说”中，阐明了关于“物质”、“运动”、“外力”、“向心力”、“绝对空间”、“绝对时间”的概念与定义，直接提出了力学三定律（牛顿三定律）作为公理，在三定律之后，推出了6条运动基本定理，在6条运动基本定理之后，分卷讨论“物体运动”及“宇宙系统”.《原理》的公理化展开模式简述如下：

基本概念：

在第一卷之前先给出了8个定义，它们是：物质的量，运动的量，物体固有的力，外力，向心力，向心力的绝对度量，向心力的加速度，向心力的运动度量.

公理（3条）：

（1）牛顿第一定律：每个物体都保持其静止或匀速直线运动的状态，除非有外力作用于它迫使其改变那个状态.

（2）牛顿第二定律：运动的变化正比于外力，变化的方向沿外

力作用的直线方向。

（3）牛顿第三定律：每一种作用都有一个相等的反作用，或者两个物体间的相互作用总是相等的而且方向相反。

运动基本定理〔6条〕：

（1）力的平行四边形法则：二力共同作用于一物体时，此物体沿二力组成的平行四边形的对角线运动；运动所需的时间与它分别受到这两个力作用时沿平行四边形两边运动的时间相同。

（2）力的三角形法则（见图5-15）：沿 AD 的力可由沿 AB 的力与沿 BD 的力合成；同样，沿 AD 的力也可分解为两个任意的沿 AB 的力与沿 BD 的力。

图 5-15

（3）运动（动量）守恒，即在物体互相碰撞时，各方向运动（动量）的总和不变。

（4）两物体或多物体体系的公共重心，在无外力作用时，保持静止或匀速直线运动，而不以体系内的物体的作用而改变其状态。

（5）当某空间静止或匀速直线运动时，该空间内所有物体的运动不受影响。

（6）不管物体之间以任何方式运动，如果有相等的加速力以平行的方向对之发生作用，则物体之间仍继续以相同的方式运动着，就像没有受到这个力的作用一样。

这6条运动的基本定理是建立在公理基础之上的，即是通过力学三定律严格证明的。《原理》在推演出运动的6条基本定理之后，就进一步讨论“物体之运动”以及“宇宙系统”。在讨论中，牛顿仍然采用相同的研究方法，即所有的定理都是从三定律以及被三定律证明了的6条运动基本定理推演出来的。

综上所述，牛顿是通过综合的方法总结出一组公理，再由公理推演得到一系列定理。这些定理散见于各卷中，其中，第一卷总共6章，定理30个；第二卷总共9章，定理38个；第三卷总共4章，定理20个。

3.《独立宣言》的公理化展开方式.

《独立宣言》是英属北美殖民地人民宣布独立的纲领性文件.

《独立宣言》是为了证明反抗大英帝国的完全合理性而撰写的，它试图借助公理化说明宣言的观点的正确性，使民众深信不疑，《独立宣言》首先提出了下面不言而喻的事实.

人人生而平等，上帝赋予他们诸如生存、自由和追求幸福等不可让与的权利.

在这个基础上，可以得到下面的结论：

(1) 为了保障这些权利，人民才组织成立政府，政府由人民同意后，取得正当的权利；

(2) 任何政府一旦损害这些权利，人们就有权改换它或废除它，建立新政府；

(3) 新政府所根据的原则及其组织权力的方式，务必使人民认为，唯有这样才最有可能保障他们的安全与幸福.

然后，列举若干具体的不平等事例，例如，司法部门包庇武装部门，使犯有死罪的军人逍遥法外；切断北美与世界各地的贸易，未得到北美人民的同意就强制征税；任意逮捕和审判北美人民等等，这些在立法、司法、行政、军事、贸易等方面对北美殖民地人民的迫害，是严重侵犯北美人民人权的罪行，从而违背了四项真理，因而人民就有权更换和废除它，成立一个自由的和独立的国家.

最后，郑重宣布独立，并宣誓支持该项宣言.(《独立宣言》全文可上网搜索)

阅读与思考

用计算机证明几何定理

用机器证明数学定理，是历史上一些杰出的数学家与哲学家梦寐以求的事.

数学问题大体上有两类：一类是求解，一类是求证. 我们熟悉的求解问题很多：解方程、解应用题、几何作图、求最大公约数与最小公倍数. 我们熟悉的求证问题，大多是初等几何证明题，还有证明恒等式、证明不等式.

中国古代数学研究的中心问题是求解. 把问题分为若干类，分别给出解题的方法. 这方法是一系列确定的步骤，谁都可以学会. 会一个方法，便能解一类问题.《九章算术》就是这么做的.

用一个固定的程序解决一类问题，这就是数学机械化的基本思想. 追求数学的机械化方法，是中国古代数学的优秀传统之一.

在西方，以希腊几何学研究为代表的古代数学，所研究的中心问题不是求解而是求证，是从公理出发用演绎推理方式证明一个一个的定理，而证明定理的方法，则是一题一证，各具巧思，无一确定的法则可循. 证明的成功有赖于技巧与灵感.

能不能找到一种方法，像解方程那样，按固定法则证明一批一批的几何定理呢？

17 世纪法国的唯理论哲学家、发明了解析几何的数学家笛卡儿，曾有过一个大胆的设想：

"一切问题化为数学问题. 一切数学问题化为代数问题. 一切代数问题化为代数方程求解问题."

笛卡儿想得太简单了：如果实现了他的计划，一切科学问题都可以机械地解决了. 因为代数方程求解是有机械法则的.

但是笛卡儿总算用坐标方法——解析几何的方法，把初等几何问题化成了代数问题。

比笛卡儿稍晚一些的德国唯理论哲学家、与牛顿同时创立微积分的数学家莱布尼茨，曾有过“推理机器”的设想，希望用一台机器代替人的推理活动。当人们争论得面红耳赤相持不下的时候，不妨心平气和地坐下来，让机器演算一遍，以确定是非曲直。莱布尼茨还真的设计过计算机，他的努力促进了数理逻辑的研究。

20 世纪的数学大师希尔伯特，在他的名著《几何基础》一书中，也曾提出过一小类几何命题的机械判定方法。

第二次世界大战以后，电子计算机的出现大大促进了定理机器证明的研究。经过许多出色数学家的辛勤耕耘，这个领域有了蓬勃发展。各国数学家先后提出过几种用机器证明初等几何定理的方法——这是数学家们长期以来就想实行机械化的领域，但是都不能在计算机上真的用来证明非平凡的几何定理。一直到杰出的中国数学家吴文俊教授在 1977 年发表他的初等几何机器证明新方法之后，在电子计算机上证明初等几何定理才成为现实。一个古老的梦想开始实现了。用吴方法已在计算机上证明了 600 多条不平凡的几何定理，其中包括一些新发现的定理。

吴方法的基本思想是：先把几何问题化为代数问题，再把代数问题化为代数恒等式的检验问题。代数恒等式的检验是机械的，问题的转化过程也是机械的，整个问题也就机械化了。

下面是吴方法（代数法）的一个简单例子。

求证：平行四边形的两条对角线互相平分。

分析 第一步：几何问题代数化。

画图（如图 5－16），并建立直角坐标系。设 $A(0,0)$，$B(p,0)$，$C(u,v)$，$D(x,y)$，$Q(z,w)$，用代数等式表示出题设条件有以下四式：

图 5－16

(1) $DC /\!/ AB$，$y-v=0$；

(2) $AD /\!/ BC$，$vx-(u-p)y=0$；

(3) 点 Q 在 AC 上，$vz-uw=0$；

(4) 点 Q 在 BD 上，$(x-p)w-(z-p)y=0$.

表示出命题结论有以下两式：

(5) $AQ=QC$，$2z-u=0$ 或 $2w-v=0$；

(6) $BQ=QD$，$x+p-2z=0$ 或 $2w-y=0$.

第二步：整序.

原来表示假设条件的方程组化为较简单的升列.

(1) $y-v=0$；

(2) $vx-(u-p)y=0$；

(3) $2pw-pv=0$；

(4) $vz-uw=0$.

第三步：伪除法求余.

若要证明 $AQ=QC$，即 $2z-u=0$ 成立，把第二步中变元"降次"后代入验证即得证.

吴方法的成功吸引人们向更高的目标攀登，怎样用计算机产生人能看得懂并能检验的证明？

我国科学家提出了用面积消点的方法，对这类问题作了更简明、更易于理解的机械化处理，即可读式证明.

下面只陈述最简的大意：

几何图形一般是由点、线、角、圆等基本元素构成，而两点决定一线，两线决定一角，三点决定一圆，…，所以这些基本的元素最后都可以还原为点的表述.

一个几何命题的已知条件，是通过一步一步画图的次序描写出来的，第一步给出的是若干个自由的点（包括：线、角、圆等），接着在这些自由点的基础上，给出与自由点有依存关系的新点，每出现一个新点，都算一个新的步骤，已知条件就是一个个新点的诞生过程的步骤.

同样一个几何命题的结论条件，也由一系列点的关系所表述，这些关系式经过整理以后，可以把所有有关点的信息放在表达式的左端，而右端只剩一个常数项.

消点证明的思路就是把结论条件中出现的许多点，先选一个在已知条件中最后出现的点消去，在消去的同时显示所根据的理由，这样，结论条件中就不再出现这个点，已知条件中也可以把最后一个步骤删去，继续如此做下去，最后结论条件的左端也只剩下纯粹的常量值，不证自明了。

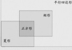
难点在于，怎么消去一个点，并提供一个消点的充足理由，这需要建立一个定理的信息库，并且还需要建立一个有力度的搜索法，以便搜索到当前待消除点的相关的已知定理，用此定理既可以消去点，又同时提供了推理的理由，这跟我们平时做题具有相同的演绎过程。

但是定理的信息库规模大大了，就好像你平时把定理都已经背下来，无须证明就能判断命题是否成立，失去了推理的意义；如果定理的信息库规模太小了，一切都要从公理开始推导，既繁琐又重复，也不符合逻辑的推导意义。

为什么叫面积消点法？就是要找出一条深贯平面几何内涵的线索，使得这条线索离源头的公理较近，离众多其他命题又不太远，这样就可以最大限度地压缩定理的信息库，而包容了消点的威力，面积定理就是这样一条能够贯穿整个知识内容的主线索，找到了这条线索，也就由此诞生了可读性的机器证明。

第6章 框图

纸上谈兵岂必输，瞻前顾后细筹谋。
欲兴土木先放样，未动笔墨已成竹。
流程通达多胜算，结构井然不糊涂。
小事大事天下事，事要了然画一图。



框图能够清晰地表达系统的各部分和各环节之间的关系。

用框图的形式对一类知识所作的描述就是知识结构图，对一个生产工艺所作的描述就是一个工序流程图，对一个算法的描述就是一个算法程序框图。

6.1　知识结构图

利用框图可以对知识体系进行梳理。

通过框图描述某领域中各阶段知识展开的主要线索与相互关系时，从不同的角度出发，有不同的描述法：结构关系、分类关系、层次关系、逻辑关系、成分关系等，都能得到很好的体现。

例 1　在数系中，实数、有理数、整数之间的成分关系，可以用图 6－1 的框图描述：

图 6－1

例 2　对代数方程中的一元一次方程、二元一次方程组、一元二次方程，可以进行如下分类（如图 6－2）：

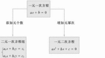


图 6－2

通过框图，看清了知识之间相互渗透与综合的关系，便于从整体

上把握知识的脉络以及各知识之间的相互联系，既见树木又见森林.

例 3　在平面几何中，四边形的分类关系可以用图 6－3 的框图描述：

图 6－3

决定一个四边形的基本要素是边长和角度，四边形分类按此线索展开.

例 4　地球温室效应示意图（图 6－4）.

图 6－4

看了上述框图，对于自然界热能的交换和自平衡过程，就有一个直观的概念.

在有些表格式的框图中，因为出现缺位，而激发了人们追求填补空缺的发明和发现意识. 譬如化学元素周期表的空缺，带动了新元素的发现.

习题 1

学而时习之

1. 决定一个平行四边形需要三个条件，请尽可能多地列举三条件.
2. 用三角形的边长和角度来描写三角形相似和全等的条件（列举多种条件）.

	两个三角形相似条件：
两个三角形全等条件：	

温故而知新

3. 请上网查阅或参看资料，画出一张生态平衡框图（局部的或整体的）.
4. 设圆的方程是 $x^2+y^2=1$，直线的方程是 $y=kx+c$，用系数 k，c 的关系来描写圆和直线相交、相切和相离的条件（采用表格式框图描写）.

6.2　工序流程图

请看下面一些例子：

例 1　某工厂加工一种零件，有三道工序：粗加工、精加工和返修加工．每件坯料先进行粗加工，经过检验后，合格的交付精加工，不合格的交付返修加工．返修后合格的仍可以再交付精加工，返修后还不合格的当作废品．精加工后，再进行最后一道检验，合格的作为成品，不合格的当作废品．

上述过程用框图画出就是下页的工序流程图（图 6－5）：

要了解某个工厂的生产全貌，必须要阅读其说明资料．如果提供工序流程图，就省去了从文字到概貌之转化过程，不但便捷，而且还

图 6-5

易于记忆.

工序流程图（working procedure technological process）是将组成整个工艺过程的所有工序按照其合理的先后顺序及流入生产的位置，用特定的符号和相互间的连线绘制成的工序安排程序的示意图.

例 2　下面我们来看空调机(单冷机)的工作流程框图(图 6-6).

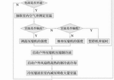


图 6-6

练　习

根据例 2 的空调机的工作流程框图（图 6－6），回答下列问题：

（1）如果空调机没有故障，但仍然不工作，有可能是什么原因？

（2）如果当室温已经偏低，空调机仍在工作，有可能是什么地方出了故障？

这个调查方法恰似炒花生，在炒花生的时候我们必须放进去许多沙子，炒出来的沙子是一点用处也没有，但不加沙子，花生就会炒糊了。

例 3　社会调查工作的流程。

要想调查学生在某个敏感问题上是否愿意与父母坦诚交流，不太容易．因为这牵涉到个人的隐私权，一般的问卷会遭到拒绝．如果调查者把调查的方式设计好，既保护了学生的隐私权，又能获得有效的调查数据．

第一步：设计无记名问卷格式如下：

要求：	务请配合，严格做到： 学号是奇数者回答问题 A，否则回答问题 B.
答案栏：	
问题：	问题 A：你的学号是奇数吗？
	问题 B：在□□□□问题上你不愿意与父母坦诚交流吗？
注意事项：	（1）不要写出你的姓名和学号． （2）不要说出你回答的是哪个问题． （3）要真实地回答问题． （4）无论回答哪个问题答案都写在同一个答案栏内． （5）在答案栏内画“√”表示“是”，画“×”表示“不是”．

第二步：设接受调查的学生有 m 个，可以统计这 m 个学生中学号是奇数的学生有多少个（譬如说是 n 个）；

第三步：统计回馈问卷中画“√”的数目（设有 y 个）；

第四步：对数据作如下的统计处理：

因为学号是奇数的 n 个学生，他们对问题的回答肯定都是“√”，

而实际上这 n 张答卷是没有意义的，真正有意义的答卷只有 $m-n$ 张．另外在 y 张画"√"的答卷中，也只有 $y-n$ 张卷子是对问题作出了肯定的回答．

因此得知：

真正对于问题 B 作出回答的人数是：$(m-n)$ 个；

不愿意与父母坦诚交流的人数是：$(y-n)$ 个；

不愿意与父母坦诚交流的比率是：$(y-n)/(m-n)$．

下面就是此项社会调查工作的流程图（图 6－7）：

图 6－7

习题 2

学而时习之

1. 到医院去看病，要先到挂号室挂号，再到科室找医生看病，医生开药之后到收费处交费，再到取药处取药．对有些患者，医生看病之后让他先做一定的检查（检查之前需要先交费），将检查结果拿回去交医生做进一步诊断后再开药、交费、取药．试将以上过程画出流程图来表示．
2. 请画出记录三个篮球队作轮赛的计分表格（包括总成绩的累计）．

温故而知新

3. 从网上下载或查阅资料，写出一个污水处理的流程图.
4. 请设计一个调查商店伪劣产品的工作流程图.

例 4　求一般一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的流程（如图 6－8）.

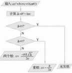


图 6－8

实例　用求根流程求一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的根.

第一步：输入方程 $x^2+3x+1=0$；

第二步：计算得 $\Delta=3^2-4\times1\times1=5$；

第三步：判断 $5<0$ 不成立，从“N”出口；

第四步：判断 $5=0$ 不成立，从“N”出口；

第五步：两个根为 $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

例 5　数学建模的流程图如下（图 6－9）.

图 6－9

实例 某皮鞋厂产量预测.

实际情景:

某皮鞋厂从今年 1 月份开始投产，前 4 个月的产量分别是 1 万双，1.2 万双，1.3 万双，1.37 万双. 由于产品质量好，款式新颖，前几个月的产品销售情况良好. 厂里分析，产量的增加是由于工人生产熟练和理顺了生产流程. 厂里也暂时不打算增加设备和工人.

提出问题:

在推销产品时，为了使接受的订单不至于过多或过少，需要估计今后几个月的产量.

数学模型:

将前 4 个月的月份与产量的关系画在坐标系中，用 4 个点来表示，如图 6－10.

$$A(1,\ 1),\ B(2,\ 1.2),\ C(3,\ 1.3),\ D(4,\ 1.37).$$

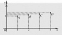


图 6－10

设法用适当的函数来模拟月份与产量之间的关系.

可以考虑如下函数：

1. 一次函数 $y=kx+b$. 将 B，C 两点的坐标代入，可解出 $k=0.1$，$b=1$.

得到一次函数 $y=0.1x+1$（如图 6－11）.

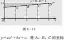


图 6－11

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$. 将 A，B，C 的坐标代入，可解出 $a=-0.05$，$b=0.35$，$c=0.7$.

得到二次函数 $y=-0.05x^2+0.35x+0.7$（如图 6－12）.

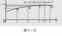


图 6－12

3. 指数函数 $y=ab^x+c$. 将 A，B，C 三点坐标代入，可解出 $a=-0.8$，$b=0.5$，$c=1.4$.

得到指数函数 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$（如图 6－13）.

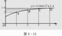


图 6－13

通过这个例子主要是要介绍数学建模的基本思想和过程. 假如你对这个例子中的数学计算感到困难，可以先不去追究其中的具体计算过程.

检验：

可以考虑从以下几方面检验：

1．以上模型在计算函数中的参数时都没有用到第 4 个月的产量．可以利用这些模型来计算第 4 个月的产量，看是否接近于实际的产量．

由函数计算出的第 4 个月的产量分别为

（1）一次函数模型：1.4；

（2）二次函数模型：1.3；

（3）指数函数模型：1.35．

第 4 个月实际产量为 1.37．指数函数模型计算结果最接近实际情况．

2．利用这些模型预测长期变化趋势，看哪一个更合理．

（1）一次函数模型 $y=0.1x+1$．按照此模型，产量将月月上升．这不大合理．

（2）二次函数模型 $y=-0.05^{x}+0.35x+0.7$．按照此模型，产量从 4 月份开始将逐月下降．这也不合理．

（3）指数函数模型 $y=-0.8\times0.5^{x}+1.4$．开始时上升较快，以后上升速度减慢，趋于稳定．这比较符合实际：开始时由于工人技术和工厂管理水平的提高，产量上升较快是合理的．以后由于原有潜力已经发挥出来，如果不增加工人和设备，上升速度变慢，趋于稳定，也是合理的．

因此，就当前情况看来，指数函数模型较好，可以先采用．随着以后数据的增多，还需要根据新的数据及时作出调整，建立更好的模型．由于情况的不断变化，要想建立一劳永逸的模型是不可能的．

习题 3

学而时习之

1. 写出使用计算器求$\sqrt{7+\sqrt{3}}$的工作流程图.
2. 请上网查阅或参看资料，给出一个垃圾处理的工作流程图.

温故而知新

3. 设计一个 200 人投票选举和计数的程序，对下列问题要作出周密的考虑：

   投票数不超过总数的 2/3，投票无效，要重新选举；

   如果投了候选人 A，B，C 之外的，算弃权；

   如果没有一个候选人获得半数以上的选票，则要淘汰末位候选人，重新进行选举.
4. 九个球，其中有一个空心的略轻一点，用一架天平，称两次，找出空心球. 根据下面的流程图（图 6－14），说明判别的过程.

图 6－14

6.3　程序框图

在第九章“算法初步”中，我们已经介绍过“程序框图”，那是从算法编制的角度认识程序框图，现在我们从知识结构的角度来看程序框图的意义。

例 1　设计一个算法，求 100 个数：$a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_{100}$ 之和。

解　算法的程序框图（图 6－15）：

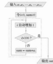


图 6－15

在本框图中，第二框里的 i 代表第 i 次求和，开始时尚未进行相加，所以 $i=0$. 第二框里的 sum 代表已经求出的前面 i 个数的和，开始时也是 0.

当进行到第三框时，i 自动增加 1，i 由 0 变为 1.

进行到第四框时，判断 i 是否大于 100. 若 i 大于 100 就从“是”出口，输出求和的 sum 值结束程序运算；若 i 小于或等于 100，从“否”出口进第五框. 现在 $i=1$，不大于 100，所以从“否”出口进入第五框.

在第五框中，

$$\text{sum} \leftarrow \text{sum} + a_i \text{（实际上此时的 } a_i \text{ 就是 } a_1\text{）},$$

把右边原来 sum 代表的和值加上 a_i，即 $0+a_1$，然后将此数装入

右边的 sum 符号中，或者说右边的 sum 符号代表 $0+a_1=a_1$.

完成第五框的任务后，进入下一轮循环回到第三框去，此时 i 又增加 1，由 $i=1$ 变成 $i=2$.

再进入第四框，判断是否 $i>100$. 当然 $i=2$ 不大于 100，因此从"否"出口进入第五框.

在第五框中，

$$\text{sum}=\text{sum}+a_2\text{（因为此时的 }a_i=a_2\text{）.}$$

右边的 $\text{sum}+a_2=a_1+a_2$.

将此数重新装入 sum 中，即左边的 $\text{sum}=a_1+a_2$.

接着从第五框出来已经完成二次循环，再回到第三框进行下一轮循环，依此进行，直到超过 100 次时立即得出结果. 最后输出的 sum 代表值 $\text{sum}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}$，此为所求之和.

例 2 写出求形如 $\frac{c}{x+a}=\frac{d}{x+b}$ 的分式方程的解的流程图，其中 a，b，c，d 是已知数.

解 流程图如下（图 6－16）：

图 6－16

这个求解的流程图，是解题过程的真实描述，并且强调了通常解分式方程问题时，应该注意增根问题的处理.

在学习程序框图设计的逻辑严密性的同时，也提醒我们日常解题时要养成严谨的习惯.

例 3 公历规定：如果年份数字被 4 整除而不被 100 整除，就是闰年；如果年份数字被 400 整除，也是闰年. 其他的年份都不是闰年. 这个规则可以用程序框图表示，如图 6－17.

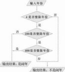


图 6－17

实例 1 根据上面的框图，判断 1980 年是否闰年.

执行过程如图 6－18.

图 6－18

因此，1980 年是闰年.

实例 2　判断 2000 年是否闰年.

执行过程如图 6－19.

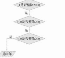


图 6－19

因此，2000 年是闰年.

练　习

1. 判断 2004 年是否闰年.
2. 判断 2100 年是否闰年.

习题 4

学而时习之

1. 解分式方程：$\frac{1}{x+2}=3x+4$.

2. 一个数列 F_1，F_2，…，F_n，…的前两项 $F_1=F_2=1$，每相邻 3 项之间具有如下框图所表示的关系。

试写出这个数列的前 8 项。

温故而知新

3. 随意给定一个数列：1，9，3，7，4，2，7，6，5，3，8，9，6，一请编写一个程序框图，确定一个 n，使得前 n 个数的和不超过 70，而前 $n+1$ 个数的和则超过 70。

4. 请设计一道工序（算法步骤），将 100 以内的质数全部按顺序列出，想一想你所设计的算法能不能推广到 10^n 以内的质数。

电脑编辑程序中常用到汉字或符号替换功能，例如，在某段文句中要将"汗"字都改成"汉"字，替换程序执行的任务就是顺次往下寻找"汗"字，找到了"汗"字就用"汉"字来替换，直至段落结束为止。

下面这个例题就是针对此项工作所设计的程序。

例 4 （信息技术处理中的典型案例之一）

已知的 100 个数据：a_1，a_2，…，a_i，…，a_{100}，并已知 a 和 b，凡是 $a_i=a$ 者，都用 b 来代替原有的 a_i。

解 程序框图的设计思想：

从头到尾逐项检查，检查到是 a 者进行替换，否则继续向后检查，检查的次数控制在 100 次。

替换程序如图 6－20。

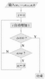


图 6－20

例 5　（信息技术处理中的典型案例之二）

在已知的 100 个数据：a_1，a_2，…，a_i，…，a_{100} 中，凡是 $a_i=a$ 者，都删除，并将后面的数据前移．

请编制一个自动删除其数据的程序．

解　程序框图的设计思想：

从头到尾逐项检查，检查到是 a 者进行删除，并将后面的数据逐项前移．否则继续向后检查．

其中有两个“逐项进行”的工作，实际上需要两个循环进行工作．

删除程序如图 6－21．

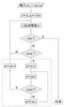


图 6－21

本框图的虚线框部分是另一个独立的循环过程，它所完成的工作是将后面的数据逐个前移，如果把这个循环体用图框

$$\boxed{a_i \leftarrow b}$$

来代替，就变成例 4 中的数据替换程序.

题中所说的数据如果是一些汉字，此时本程序就是电脑编辑程序中常用的汉字删除功能键所执行的工作，在删除的同时，后面的汉字自动向前移.

习题 5

学而时习之

1. 设计一个程序，将已经排好序的 20 个数反过来排。
2. 设计一个程序，将已知的 20 个数，分成甲、乙二组，大于 15 的放到甲组里，其余的放到乙组里。

温故而知新

3. 设计一个程序，从已知的 20 个数中找出最大数。
4. 一个数列有 40 个数，现在想从这 40 个数中找出最小的一个数，请编制一个程序框图。
5. 一个数列有 40 个数，现在想统计小于 37 的数据个数，请编制一个程序用框图画出。

小结与复习

一、指导思想

框图是表示一个系统各部分和各环节之间相互关系的图示，它的作用在于能够清晰地表达比较复杂的系统各部分之间的关系．框图已经广泛应用于算法、计算机程序设计、工序流程的表述、设计方案的比较等方面，是表示数学计算与证明过程中主要逻辑步骤的工具，并将成为日常生活和各门学科中进行交流的一种常用表达方式．学习用“流程图”、“结构图”等刻画数学问题以及其他问题的解决过程，有助于提高抽象概括能力和逻辑思维能力，以及清晰地表达和交流思想的能力．

二、内容提要

1．知识结构图．

2．工序流程图．

3．程序框图．

三、学习要求和需要注意的问题

1．学习要求．

（1）结构图．

1）通过实例，了解结构图；运用结构图梳理已学过的知识，整理收集到的资料信息．

2）结合作出的结构图与他人进行交流，体会结构图在揭示事物联系中的作用．

（2）流程图．

1）通过具体实例，进一步认识程序框图．

2）通过具体实例，了解工序流程图（即统筹图）.

3）能绘制简单实际问题的流程图，体会流程图在解决实际问题中的作用.

2. 需要注意的问题.

学习框图，应从分析实例入手，运用框图表示数学计算与证明过程中的主要思路与步骤、实际问题中的工序流程、某一数学知识系统的结构关系等. 在运用框图的过程中理解流程图和结构图的特征，掌握框图的用法，体验用框图表示解决问题过程的优越性.

四、参考例题

例　图 6－22 是求正数 a 的算术平方根近似值（精确到 0.1）的一个算法的框图.

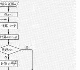


图 6－22

如果要得到精确到0.01的近似值，应当怎样修改框图程序？

实例　按照上述算法，求 2 的算术平方根（精确到 0.1）.

执行过程如图 6-23.

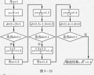


图 6-23

故$\sqrt{2}\approx1.4$.

复 习 题 六

学而时习之

1. 请在下面表格内填入数据，使 6 个等号皆成立，并用框图将其过程表示出来.

15^2	+	$(\quad)^2$	=	25^2	
+		+		+	
$(\quad)^2$	+	48^2	=	$(\quad)^2$	
‖		‖		‖	
39^2	+	$(\quad)^2$	=	$(\quad)^2$	

2. 根据图 6－24 中的已知数据，求中心矩形的面积，并用框图将其过程表示出来。

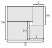
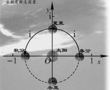


图 6－24

3. 利用小结与复习中参考例题所说的方法，求 3 的平方根（精确到 0.1）。

第7章 数系的扩充与复数

平方得负岂荒唐？
左转两番朝后方．
加减乘除依旧算，
方程有解没商量．



人类认识数的范围是一步一步扩充的．

引进了虚数单位 i 作为方程 $x^2=-1$ 的根，数的范围就从实数扩充到复数．

“虚数”不虚，它不但是数学理论中不可缺少的一部分，而且在人类的生活、生产和科学研究中有着重要的应用．

7.1 解方程与数系的扩充

人类所认识的数的范围是一步一步扩充的.

这种扩充，一方面是由于描述和解决实际问题的需要，另一方面也是由于解决数学自身的矛盾的需要.

比如，最开始人们为了表示物体个数而认识了正整数，并且引入了加、减、乘、除四则运算. 正整数做加法与乘法可以通行无阻，但减法与除法就不行了. 什么叫减法？就是已知两数的和 a 与其中一个加数 b 求另一个加数的运算. 求 $a-b$ 就是求一个 x 使 $x+b=a$，这就是解方程. 同样，除法也是解方程，求 $a\div b$ 就是解方程 $bx=a$.

0 的引入，一方面固然是来自实际的需要，比如为了表示“没有物体”，表示计量的起点（比如计量温度、计量距离），等等. 但是它也使减法 $a-a$ 可以进行，方程 $x+a=a$ 有解.

分数的引入当然有实际的需要，比如用一把尺去度量某一个长度，不能正好量尽时，需要将尺平均分割成更小的长度单位再去度量. 但这就使除数 b 不为 0 时，除法 $a\div b$ 不但对整数 a，b 总能进行，而且对分数 a，b 也总能进行，也就是说，方程 $bx=a$ （$b\neq 0$）在非负的有理数范围内总是有解.

为了表示具有相反意义的量，引入了负数，这就将数的范围扩大到了全体有理数，这使得减法 $a-b$ 可以畅通无阻，方程 $x+b=a$ 总是有解.

在有理数范围内四则运算通行无阻(除数为0例外)，但解方程还不行. 比如 $x^2=2$ 就没有有理数解，但是它的解却是客观存在的，正方形的对角线长与边长之比就是这个方程的解. 但这个比不能用有理数表示. 这促使数的范围扩大到全体实数. 任意两条线段的长度比都可以用实数表示. 任意一个非负实数都有任意 n 次的方根. 也就是说，当 n 为正整数时，方程 $x^n=a$ 当 $a\geqslant 0$ 时总有解. 但是，当 $a<0$ 时 $x^2=a$ 没有解. 即使 $x^2=-1$ 这样简单的方程都没有解. -1 没有平方根.

这启发我们对数系作再一次的扩充．具体做法是：引进一个新的数，用符号 i 来代表，它满足条件 $i^2=-1$．并且规定这个新的数 i 可以按照我们熟悉的运算法则以及一个新的法则 $i^2=-1$ 与实数进行运算，产生一批新的数，与原来的全体实数一起组成一个新的数系．

7.2 复数的概念

规定一个符号 i 代表一个数，满足条件 $i^2=-1$，称这个 i 为虚数单位．并且允许它与任意一个实数 b 相乘得到数 bi，还可以再与任意一个实数 a 相加得到数 $a+bi$．

形如 $a+bi$（其中 a，b 是实数）的数称为复数（complex number），其中 a 称为复数 $a+bi$ 的实部（real part），bi 称为 $a+bi$ 的虚部（imaginary part），b 称为 $a+bi$ 的虚部系数（coefficient of imaginary part）．

通常将复数 z 的实部记作 $\mathrm{Re}\, z$，将它的虚部系数记作 $\mathrm{Im}\, z$．

两个复数 $a+bi$，$c+di$（a，b，c，d 是实数）相等的充分必要条件为：它们的实部相等，且虚部系数相等，即 $a=c$ 且 $b=d$．

例 求以下复数的实部和虚部系数．

(1) $1-i$；　(2) $3+2\sqrt{2}$；　(3) $-i$．

解 (1) $1-i=1+(-1)i$，实部为 1，虚部系数为 -1．

(2) $3+2\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})+0i$，实部为 $3+2\sqrt{2}$，虚部系数为 0．

(3) $-i=0+(-1)i$，实数为 0，虚部系数为 -1．

容易看出，当虚部系数 $b=0$ 时复数 $a+0i$ 就是实数 a．反过来，实数 a 也就是虚部系数为 0 的复数 $a+0i$．

我们习惯上用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数组成的集合，$\mathbf{C}$ 表示全体复数组成的集合，于是 $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a, b\in\mathbf{R}\}$．而 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{C}$ 的子集合，由 $\mathbf{C}$ 中虚部系数为 0 的全体复数组成．

当虚部系数 $b\neq 0$ 时，复数 $a+bi$ 不是实数，称它们为

虚数（imaginary number）．特别地，实数为 0，虚部不为 0 的复数 bi 称为纯虚数（pure imaginary number）．

练　习

1. 在以下哪些范围内做加法可以进行无限？哪些范围内做乘法可以进行无限？
   （1）20 以内的正整数（即，从 1 到 20 的全体整数）；
   （2）大于 0 的全体偶数；
   （3）大于 0 的全体奇数；
   （4）全体正整数；
   （5）绝对值为 1 的实数．
2. 在以下哪些范围内进行加、减、乘、除运算（做除法时要求除数不为零）可以进行无限？
   （1）全体整数；
   （2）全体有理数；
   （3）全体实数．
3. 求以下复数的实部和虚部系数：
   （1）$i-1$；　（2）$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$；　（3）$2-\sqrt{2}i$；　（4）$-\frac{i}{2}$．

习题 1

学而时习之

1. 下列命题正确的是（　）
   （A）实数集与复数集的交集是空集　（B）任何两个复数都不能比较大小
   （C）任何复数的平方均非负　（D）虚数集与实数集的并集为复数集
2. 以 $2i-\sqrt{5}$ 的虚部系数为实部，以 $\sqrt{5}i+2i^2$ 的实部为虚部系数的新复数为（　）
   （A）$2-2i$　（B）$2+i$　（C）$-\sqrt{5}+\sqrt{5}i$　（D）$\sqrt{5}+\sqrt{5}i$

温故而知新

3. 复数 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）为纯虚数是 $a=0$ 的（　　）

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　（D）既非充分又非必要条件

4. 求当 m 为何实数时，复数 $z=\frac{m^2-m-6}{m+3}+(m^2-2m-15)i$ 是：（1）实数；（2）纯虚数；（3）虚数.

7.3 复数的四则运算

先尝试利用我们所熟悉的运算律以及等式 $i^2=-1$ 进行两个复数的加、减、乘运算.

例 1 已知复数 $z_1=1+2i$ 与 $z_2=4-3i$. 试求它们的和 z_1+z_2，差 z_1-z_2，积 z_1z_2.

解 $z_1+z_2=(1+2i)+(4-3i)=(1+4)+(2-3)i=5-i$.

$$z_1-z_2=(1+2i)-(4-3i)$$
$$=(1-4)+[2-(-3)]i=-3+5i.$$

$$z_1z_2=(1+2i)(4-3i)$$
$$=1\times4+2i\times4+1\times(-3i)+2i\times(-3i)$$
$$=4+8i-3i-6i^2$$
$$=4+8i-3i-6\times(-1)$$
$$=10+5i.$$

容易看出：

两个复数 $a+bi$，$c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$）的加、减、乘运算，可以先看作以 i 为字母的实系数多项式的运算来进行. 再将 $i^2=-1$ 代入，将实部和虚部分别合并，就得到最后的结果.

利用 $i^2=-1$ 将表达式化成 i 的一次多项式后，常数项就是实部，一次项就是虚部.

一般地，对任意两个复数 $a+bi$，$c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），有

加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$，

减法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$，

乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

这些公式不需记忆，只要自己按照多项式展开的法则以及等式 $i^2=-1$ 进行运算就行了.

我们已经会做复数的加、减、乘法．那么，对任意两个复数 $z_1=a+bi$ 和 $z_2=c+di$，当 $z_2\neq 0$ 时能否做除法求它们的商 $\frac{z_1}{z_2}$？为此，只要将商

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

的分子分母同乘适当的非零复数，将分母化为实数即可.

注意到

$$\begin{aligned}(c+di)(c-di)&=c^2-d^2i^2\\&=c^2+d^2.\end{aligned}$$

当 $c+di\neq 0$ 时，实数 c，d 不同时为 0，$c^2+d^2>0$．因此，将商 $\frac{a+bi}{c+di}$ 的分子分母同乘 $c-di$ 就可将分母化为正实数 c^2+d^2，从而将商化为复数的标准形式.

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\\&=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.\end{aligned}$$

实际计算时不需记忆这个公式，只要分子分母乘以适当的复数将分母化为正实数就行了．记住一个公式 $(c+di)(c-di)=c^2+d^2$ 反而更有用，更值得熟记.

将虚数分母 $c+di$ 乘以 $c-di$ 化为正实数 c^2+d^2 的过程，类似于在初中化简根式时将含根号的分母 $c+d\sqrt{D}$ 乘以 $c-d\sqrt{D}$ 化为有理式 c^2-d^2D 的过程．只不过我们现在不是“分母有理化”，而是“分母实数化”.

例 2　已知复数 $z_1=1+2i$，$z_2=4-3i$．求 z_2^{-1} 及 $\frac{z_1}{z_2}$.

解　$$\begin{aligned}z_2^{-1}&=\frac{1}{4-3i}=\frac{4+3i}{(4-3i)(4+3i)}\\&=\frac{4+3i}{4^2+3^2}=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{1+2i}{4-3i}=\frac{(1+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}\\&=\frac{4+3i+8i-6}{4^2+3^2}=-\frac{2}{25}+\frac{11}{25}i.\end{aligned}$$

解决了复数的加、减、乘、除四则运算问题，我们再来尝试讨论

在复数范围内开平方的问题，也就是求解一元二次方程 $x^2=a$ 的问题．一元二次方程 $x^2=-1$ 在实数范围内没有解，我们引入一个新的数 i 作为它的一个解，将数的范围扩大到了复数．这个方程在复数范围内有解 i，同时由 $(-i)^2=i^2=-1$ 知道方程 $x^2=-1$ 在复数范围内有两个解：i 与 $-i$．也就是说，在复数范围内 -1 有两个平方根 i．很自然要问，除了 -1 以外，别的负实数在复数范围内是否有平方根？进一步可以问，任意复数 $a+bi$ 在复数范围内是否有平方根？比如 i 在复数范围内是否有平方根，方程 $x^2=i$ 在复数范围内是否有解？

我们在实数集合之外为 -1 强行规定了一个平方根 i，是否需要在复数集合之外再规定一个什么符号使它的平方等于 i？

例 3 在复数范围内解下列方程：

(1) $z^2=-3$；　　(2) $z^2=i$．

解 (1) 容易验证 $(\pm\sqrt{3}i)^2=(\sqrt{3})^2i^2=3\times(-1)=-3$，因此 $\pm\sqrt{3}i$ 是方程 $x^2=-3$ 的两个根，也就是 -3 的两个平方根．

利用这个方法，可求出任意负实数 a 的平方根为 $\pm\sqrt{-a}i$．注意其中的 $-a$ 是正实数，因而 $\sqrt{-a}$ 是正实数的算术平方根．

(2) 设 $z=x+yi$ 是方程 $z^2=i$ 的复数根，其中 x，y 是待定系数．则

$$(x+yi)^2=i \Leftrightarrow (x^2-y^2)+2xyi=i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy=1. \end{cases}$$

问题归结为在实数范围内求解方程组

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, & ① \\ 2xy=1. & ② \end{cases}$$

由①式得 $y=\pm x$，代入②得

$$\pm 2x^2=1.$$

仅当 $y=x$ 时，$2x^2=1$，即 $x^2=\frac{1}{2}$ 有实数解 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故关于 x，y 的上述方程组有两组实数解 $y=x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．于是方程 $z^2=i$ 有两个复数根 $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$，它们也就是 i 的两个平方根．

例 4 在复数范围内解一元二次方程 $x^2+x+1=0$．

解 判别式 $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0$，方程无实数根．但在复数范围内 -3 有两个平方根 $\pm\sqrt{3}i$，由求根公式可得方程的复数解

容易看出，对任意的复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，用同样的方法（待定系数法）可求出方程 $z^2=a+bi$ 的复数根 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，也就是 $a+bi$ 的平方根．你不妨一试．

$$\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

由于在复数范围内开平方已经通行无阻，因此，利用求根公式可以求出任何一个一元二次方程的根．利用判别式判别实系数一元二次方程是否有根的定理应当修改为：

设 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）是实系数一元二次方程，$\Delta=b^2-4ac$ 是它的判别式，则

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不同的实根 $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相同的实根 $-\frac{b}{2a}$；

当 $\Delta<0$ 时，方程有两个不同的虚根 $-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{i}$.

多知道一点

代数基本定理

在实数范围内，负数没有平方根，因此当实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时方程无实数解．但在复数范围内，当 $\Delta<0$ 时它也有两个平方根 $\pm\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}$，因此可以由求根公式求出两个虚根 $-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{i}$.

这说明了，在复数范围内，所有的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 都有根，并且可以用求根公式求出它的所有根．

更进一步，假定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数 a，b，c 都是复数，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 是复数．但不论 Δ 取什么值，在复数范围内总是有平方根（且当 $\Delta\neq0$ 时它总有两个不同的平方根），因此仍然能够用求根公式求出一元二次方程的全部根（当 $\Delta\neq0$ 时有两个不同的根）．这说明了，在复数范围内解一元二次方程可以通行

无能．

准确地说，当 $n\geq 5$ 时，不存在由方程的系数经过加、减、乘、除和开方运算表示的根的求根公式．

对于更高次数的复系数一元 n 次方程 $a_0+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0(a_0\neq 0)$，一般来说不存在求根公式．但可以证明：不论它的系数取什么复数值，这个一元 n 次方程在复数范围内总是有根．这个结论在代数学发展史上具有重要的意义，称为代数基本定理（Fundamental Theorem in Algebra）．这个定理是由高斯首先提出并证明的，现在已经有很多种证明．这些证明都用到大学数学的知识，就不能向中学生介绍了．

练 习

1．化简下列各式．

（1）$(1+i)^3$；　　（2）$(1-i)^4$；

（3）$(3+i)(3-i)$；　　（4）$\dfrac{1+i}{1-i}$．

2．已知 $m\in\mathbf{R}$，且 $(m+mi)^6=-64i$，求 m 的值．

3．在复数范围内解下列各方程：

（1）$x^2+2x+3=0$；　　（2）$x^2-4x+5=0$．

习题 2

学而时习之

1．已知 $a-1+2ai=-4+bi$，a，$b\in\mathbf{R}$，求 a，b 的值．

2．已知 $a=\dfrac{-2-i}{1+2i}$，求 a^4 的值．

3．解方程：$2x^2-x+1=0$．

温故而知新

4. (1) 计算下列各值.

i^2，　i^3，　i^4，　i^5.

(2) 根据上述结果找出规律，并计算 i^{100} 的值.

(3) 化简：$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$.

5. 根据下列条件，求 z.

(1) $z(1+i)=2$；

(2) $z-1+zi=-4+4i$.

7.4 复数的几何表示

我们知道，实数可以用一条数轴上的点来表示. 具体表示方法如下：取一条规定了方向的直线，在直线上取定一点 O 作为原点，取定一个单位长，则这条直线成为一条数轴. 每个实数 a 由数轴上唯一一点 P 表示，记 $\boldsymbol{e}$ 为沿着数轴的正方向、长度等于单位长的向量，则数轴上点 P 与它所表示的实数 a 的关系为$\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}$. 也就是说：每个实数 a 都可用平行于数轴的向量$\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}$ 来表示. 如图 7－1.

图 7－1

由实数的这种几何表示法得到启发，可以想到用平面上的点和向量来表示复数. 在平面上建立直角坐标系. 以每个复数 $z=a+bi$ 的实部 a 和虚部系数 b 组成坐标(a,b)，以(a,b)为坐标在平面上可以画出唯一的一个点 $P(a,b)$，同时也决定唯一一个向量$\overrightarrow{OP}$，这个向量的坐标也是(a,b). 将复数 $a+bi$ 用平面上这个点 $P(a,b)$表示，同时也用平面上这个向量$\overrightarrow{OP}=(a,b)$表示，这就将全体复数与平面上点的集合建立了一一对应关系，也将全体复数与平面上全体向量的集合建

立了一一对应关系，如图 7-2.

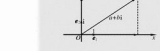


图 7-2

按上述方式与全体复数建立了一一对应关系的平面叫作复平面(complex plane)，它的 x 轴由表示实数的所有的点组成，y 轴由表示零或纯虚数的所有的点组成. 特别，数 1 用沿 x 轴正方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$ 表示，数 i 用沿 y 轴正方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$ 表示. 设复平面上的向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标为 (a,b)，则 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$. 将这个表达式中的 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分别换成 1，i，就得到 $\boldsymbol{v}$ 所表示的复数 $a+bi$.

例 1 (1) 在复平面上画出分别表示以下复数 z_1，z_2，z_3，z_4 的点 P_1，P_2，P_3，P_4.

$$z_1=1,\quad z_2=\mathrm{i},\quad z_3=4+3\mathrm{i},\quad z_4=4-3\mathrm{i}.$$

(2) 求出表示以上复数的向量 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$，$\overrightarrow{OP_4}$ 的模. 试推广你的结论.

(3) 表示以上复数的点中是否有两个点关于实轴对称？它们所代表的复数有什么关系？

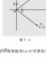


图 7-3

解 (1) 如图 7-3.

(2) 由 P_1，P_2，P_3，P_4 的坐标 $(1,0)$，$(0,1)$，$(4,3)$，$(4,-3)$ 分别算出各向量的模为

$$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=1,$$

$$|\overrightarrow{OP_3}|=\sqrt{4^2+3^2}=|\overrightarrow{OP_4}|.$$

一般地，由表示复数 $a+bi$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标为 (a,b) 可求出它的

模为 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

（3）点 $P_3(4,3)$，$P_4(4,-3)$关于实轴对称，它们所表示的复数 $4+3\mathrm{i}$ 与 $4-3\mathrm{i}$ 的实部相同，虚部系数互为相反数.

对任意复数 $z=a+b\mathrm{i}$，我们将它在复平面上所对应的向量的模 $\sqrt{a^2+b^2}$ 称为复数 z 的模（module），也称为 z 的绝对值，记作 $|z|$，写成公式，即

$$|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2},$$

其中 a，$b\in\mathbf{R}$.

想一想，当复数 z 是实数时，用这个公式算出 $|z|$，是否与以前熟悉的绝对值一致？

对任意复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，如果保持它的实部 a 不变，将虚部系数 b 变成它的相反数 $-b$，得到的复数 $a-b\mathrm{i}$ 称为原来的复数 z 的共轭复数（conjugate complex number），记为 $\bar{z}$. 也就是说

$$\overline{a+b\mathrm{i}}=a-b\mathrm{i}.$$

当然，反过来也有 $\overline{a-b\mathrm{i}}=a+b\mathrm{i}$，因此 $\bar{\bar{z}}=z$.

于是，例 1 的（3）的结论可以推广为：

复平面上两点 P，Q 关于 x 轴对称 $\Leftrightarrow$ 它们所代表的复数相互共轭.

做除法时用到的重要公式

$$(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=c^2+d^2,$$

可以重新叙述为

$$z\bar{z}=|z|^2,$$

即

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}.$$

设复数 $z=a+b\mathrm{i}$，$\omega=c+d\mathrm{i}$ 分别由向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 表示，如图 7－4. 即

图 7－4

$\overrightarrow{OP}=(a,b)$，$\overrightarrow{OQ}=(c,d)$，则这两个复数的和 $z+\omega=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$ 由向量$\overrightarrow{OS}=(a+c,b+d)=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$表示，$OS$ 是以 OP，OQ 为邻边的平行四边形的对角线．这也就是说，复数 z，ω 的加法由对应的向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$的加法来表示．

类似地，复数的减法由对应的向量的减法来表示：

$$z-\omega=(a-c)+(b-d)\mathrm{i} \longrightarrow \overrightarrow{OD}=(a-c,b-d)=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ},$$

OD 与 QP 同向平行且长度相等．

复数 z 与任一实数 k 的乘法由复数对应的向量$\overrightarrow{OP}$与 k 的乘法表示：

$$kz=ka+kb\mathrm{i} \longrightarrow \overrightarrow{OM}=(ka,kb)=k\overrightarrow{OP}.$$

例 2　已知 $OACB$ 是复平面上的平行四边形，O 是原点，A，B 分别表示复数 $3+\mathrm{i}$，$2+4\mathrm{i}$，M 是 OC，AB 的交点，如图 7－5．求 C，M 表示的复数．

图 7－5

解　由于$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别代表 $3+\mathrm{i}$，$2+4\mathrm{i}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$代表的复数为$(3+\mathrm{i})+(2+4\mathrm{i})=5+5\mathrm{i}$，这也就是 C 代表的复数．

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$代表的复数为$\frac{1}{2}(5+5\mathrm{i})=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$，这也就是 M 代表的复数．

阅读与思考

$i^2=-1$ 的几何意义

用平面向量来表示复数，使复数有了几何意义。我们已经知道了复数的加减运算的几何意义，但还不知道复数乘法的几何意义，因此还不知道 $i^2=-1$ 有什么意义，也就是两个 i 相乘为什么得 -1。

要解释 $i^2=-1$，先看 $(-1)^2=1$ 的几何意义。将平面上每个向量 $\boldsymbol{v}$ 用从原点 O 出发的有向线段 OP 来表示。用 -1 乘 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}$ 将它变为 $-\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP'}$，其效果是将 OP 绕 O 旋转 180° 变为 OP'，同时也就将平面上每个点 P 绕 O 旋转 180° 变到 P'，也就是关于 O 作中心对称。将向量 $\overrightarrow{OP}$ 乘 $(-1)^2$，也就是乘了 -1 再乘 -1，转了 180° 再转 180°，就是转 360°，每条这样的有向线段 OP 都转回原来的位置，相当于乘了 1。这就是说 $(-1)^2=1$。

向量乘 -1 是旋转 180°，可以将这个旋转平均分成两次来完成，每次旋转 90°，连转两次就是转 180°。假如规定一个新的数 i，将复平面上每个向量 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}$ 乘 i 就是沿逆时针方向旋转 90°，那么乘 i^2 就是连续旋转两个 90°，也就是旋转了 180°，相当于乘 -1。如图 7-6，这就说明了 $i^2=-1$。

图 7-6

既然复数由向量代表，容易认为复数相乘由向量的数量积代表。请自己举例验证看是否如此。比如，i 由 y 正方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_2$ 代表，i 与 i 的乘积是否等于 $\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的数量积？又如，i 与 $1+i$ 的乘积是否等于它们所对应的向量的数量积？

$(-1)^2=1$ 可以用两句诗来说明，“后转两次转向前，负负为正理显然。”向量乘 -1 就是向后转，连乘两个 -1 就是后转再后转，回到原来的位置。

逆时针方向转 90°，俗话说就是“向左转”。“左转再左转，等于向后转”，就是 $i^2=-1$。本章开始的诗句“平方得负岂荒唐，左转两番朝后方”说的就是这个意思。“左转两番朝后方”是众所周知的常识，有什么荒唐和虚幻的呢？当然，“右转两番朝后方”也是对的，这就是说 $(-i)^2=-1$，-1 有两个平方根 $\pm i$。

练习

1. 复数 $z=(a^2-2a)+(a^2-a-2)\mathrm{i}$ 对应点在虚轴上，则实数 $a=$________.

2. 若复数 $(-3+k^2)-(k^2-2)\mathrm{i}$ 所对应的点在第三象限内，求实数 k 的取值范围.

习题 3

学而时习之

1. 复数 $z_1=3+\mathrm{i}$，$z_2=1-\mathrm{i}$，则 $z=z_1\cdot z_2$ 在复平面内对应的点位于第____象限.

2. 已知 $z=1+\mathrm{i}$，复平面内将 z 所对应的向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转到与 $\bar{z}$ 对应的向量 $\overrightarrow{OB}$ 重合时，所转过的最小角为（　　）

   (A) 90°　　(B) 180°　　(C) 270°　　(D) -90°

温故而知新

3. 假如 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$，$a$，$b$，$c$，$d\in\mathbf{R}$，但 $a\neq b$ 或 $c\neq d$，会发生什么矛盾？

4. z 是任意复数，求证：

   (1) $z+\bar{z}$ 是实数；

   (2) z 是实数 $\Leftrightarrow z=\bar{z}$.

小结与复习

一、指导思想

在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数学与现实世界的联系.

二、内容提要

1．复数及其相关概念.

（1）虚数单位：i（其中 $i^2=-1$）；

（2）复数：具有形状 $a+bi$（其中 a，b 是实数）的数称为复数，其中 a 称为复数 $a+bi$ 的实部，bi 称为 $a+bi$ 的虚部，b 称为 $a+bi$ 的虚部系数；

（3）虚数：当 $b\neq0$ 时，$a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）为虚数，特别地，bi（$b\neq0$）叫纯虚数；

（4）复数的模：若 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），则复数 z 的模为 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

2．复数相等的充要条件：$a+bi=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})\Leftrightarrow\begin{cases}a=c,\\b=d.\end{cases}$

3．复数的四则运算：一般地，对任意两个复数 $a+bi$，$c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$）.

加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$；

减法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$；

乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$；

除法：当 $c+di\neq0$ 时，$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$.

4. 在复数范围解简单的方程.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求.

(1) 理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件;

(2) 了解复数的代数表示法及其几何意义;

(3) 能进行复数代数形式的四则运算, 了解复数代数形式的加减运算的几何意义.

2. 需要注意的问题.

(1) 在复数概念与运算的教学中, 应注意避免繁琐的计算与技巧训练;

(2) 注意向量与复数的几何意义相结合.

四、参考例题

例 1 设 $z\in\mathbf{C}$, 求满足条件 $z+\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$ 且 $|z-2|=2$ 的复数 z.

解 设 $z=a+bi(a, b\in\mathbf{R})$,

则 $z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

$\therefore$ $z+\frac{1}{z}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

$\because$ $z+\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$, $\therefore$ $b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$,

$\therefore$ $b=0$ 或 $a^2+b^2=1$.

又$\because$ $|z-2|=2$,

$\therefore$ $|(a-2)+bi|=2$, $\therefore$ $(a-2)^2+b^2=4$.

① 当 $b=0$ 时, $(a-2)^2=4$,

$\therefore$ $a=4$ 或 $a=0$.

又$\because$ $z\neq0$,

$\therefore$ $z=4$.

② 当 $a^2+b^2=1$ 时，

$\therefore\ (a-2)^2+1-a^2=4$，

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$，

$\therefore\ b=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore\ z=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}$.

综合①，②得 $z=4$ 或 $z=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}$.

例 2 已知复数 z 满足 $|z|=\sqrt{2}$，z^2 的虚部系数为 2，z 所对应的点 A 在第一象限.

(1) 求 z；(2) 若 z，z^2，$z-z^2$ 在复平面上对应点分别为 A，B，C，求 $\cos\angle ABC$.

解 (1)令 $z=x+y\mathrm{i}$ $\because |z|=\sqrt{2}$，

$\therefore\ x^2+y^2=2$， ①

又$\because\ z^2=(x+y\mathrm{i})^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，

$\therefore\ 2xy=2$， $\therefore\ xy=1$， ②

由①，②可解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

图 7-7

$\therefore\ z=1+\mathrm{i}$，或 $z=-1-\mathrm{i}$.

又$\because\ x>0$，$y>0$，

$\therefore\ z=1+\mathrm{i}$.

(2) $z^2=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，$z-z^2=1+\mathrm{i}-2\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$.

如图 7-7 所示， $\therefore A(1,\ 1)$，$B(0,\ 2)$，$C(1,\ -1)$，

$\therefore\ \overrightarrow{BA}=(1,\ -1)$，$\overrightarrow{BC}=(1,\ -3)$，

$\therefore\ \cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{1+3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

复习题七

学而时习之

1. 对于下列四个命题：

(1) 任何复数的模都是非负数；

(2) x 轴是复平面的实轴，y 轴是虚轴；

(3) $z_1=\sqrt{5}i$，$z_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$，$z_3=-\sqrt{5}$，$z_4=2-i$，则这些复数的对应点共圆；

(4) $|\cos\theta+i\sin\theta|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 0.

其中有(　　)个正确命题.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2. 若复数 $z=\sin 2\alpha-i(1-\cos 2\alpha)$ 是纯虚数，$\alpha\in[0,2\pi)$，则 $\alpha=$________.

3. 若复数 $z_1=2-i$，$z_2=1-3i$，则 $\frac{i}{z_1}+\frac{z_2}{5}$ 的虚部为________.

4. 把复数 $1+i$ 对应的点向右平移一个单位，再向下平移一个单位得到点 A，把所得向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 $90°$，得到向量 $\overrightarrow{OB}$，则 B 点对应的复数为________.

温故而知新

5. 求满足下列各条件的复数 z.

(1) $zi=i-1$；　　(2) $z^2-z+2=0$；

(3) $|z|-z=\frac{10}{1-2i}$；　　(4) $z^2=7+24i$.

6. 已知 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，$|z_1|=\sqrt{3}$，$|z_2|=\sqrt{2}$，$|z_1+z_2|=2\sqrt{2}$，求 $|z_1-z_2|$.

7. 已知 $|z|=2$，求 $|z-i|$ 的最大值.

上下而求索

1的3次方根

在实数范围内，方程 $x^3=1$ 只有一个根 $x=1$，但在复数范围内则不然。

8. 用代数方法求方程 $x^3=1$ 的全部复数根。

提示：将方程变形为 $x^3-1=0$，左边分解因式得 $(x-1)(x^2+x+1)=0$，分别求出 $x-1=0$ 和 $x^2+x+1=0$ 的复数根，凑到一起就是 $x^3=1$ 的复数根。

9. 在复平面上画出 $x^3=1$ 的复数根所对应的点，观察这些点组成什么样的图形。

10. 对任意角 α，β，通过计算验证等式

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta).$$

并由此推出

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^2=\cos 2\alpha+\mathrm{i}\sin 2\alpha,$$

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+\mathrm{i}\sin 3\alpha.$$

11. 根据上面的等式，找出使 $(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^3=1$ 的 α。你得到了方程 $x^3=1$ 的哪些根？这些根在复平面上的点组成什么样的图形？

数学文化

数系扩充小史

自然数的原始概念在人类的文字尚未出现时即已形成。例如前人清点猎物的数目，拿过一只猎物（例如山鸡）就扳一个指头，或在一个小土坑里放上一颗石子，或在绳子上打一个结。这些事物的多寡都是自然形成的，所以后人称其为自然数。由于双手有10个指头，所以古代中国和印度等国发明了十进制计数法。南美洲气候炎热，那里古代人类打赤脚，所以古玛雅文明中有20进制。自然数的概念究竟是何时何地的人们首先创立，是不可考究的事了。据考古学家估计大约在5万年以前有的甚至说30万年以前，人类已有自然数的概念。公元前5世纪左右，中国发明了数字（从一到九）：一 二 三 亖 〡 ⊥ ⊥ ⊥ ⊥，而且我国古代人已有一一对应计数的观念，例如想数数人有多少，则问“几口人?”人与嘴一一对应，牛与头一一对应。自然数是数学的祖先。19世纪，德国数学家克罗内克说：“上帝创造了自然数，其余（数学）都是人造的。”

公元元年左右，中国《九章算术》中由除法与减法引入了分数和负数。

公元876年，印度人首先把零当成数看待，且创造了数字0，1，2，3，4，5，6，7，8，9。公元9世纪由阿拉伯数学家花拉子米把这十个数字引入欧洲。由于花氏是阿拉伯人，欧洲人误称0，1，…，9为阿拉伯数字，其实应正名为印度数字，但已沿袭多年的“阿拉伯数字”之称，不易改变称谓了。

公元前6世纪毕达哥拉斯学派的著名数学家希帕苏斯提问单位正方形的对角线有多长。当时毕达哥拉斯学派的信条是“万物皆

数”，他们和当时全人类都认为数就是正分数和正整数，此外不存在别的什么数．但由勾股定理，单位正方形对角线长 l 应满足 $l^2=2$，若 $l=\frac{q}{p}$ 是既约分数，则会引出矛盾．为了维护毕达哥拉斯的尊严和世俗对数的偏见，毕氏竟因此下令把他的得意门生希帕苏斯投入爱琴海，葬身鱼腹．但问题并没有解决，对角线是物，它的长就应该是数，但这个数不是毕达哥拉斯时代人们所知道的数，于是出现了第一次数学危机．当然应当承认事实，而不是事实服从传统的观念，所以从那之后人们发现了一种不是自然数与分数的数，名曰“无理数”．无理数比负数发现得早，数学家们把有理数与无理数统称为实数．但直到19世纪，数学上才搞清楚了什么是无理数，什么是实数．

1545年，意大利著名数学家卡丹用三次方程 $x^3=px+q(p,q>0)$ 的求根公式 $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ 求解时，面对负数开平方但又不能把这种数舍去的局面．例如 $x^3=15x+4$，它有一个根 x_1 是4，而把 $p=15$，$q=4$ 代入公式则得这个根，

$$x_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

卡丹叹道：“对这种量进行运算，感到道德上的折磨，但结果令人满意．”卡丹称诸如 $\sqrt{-121}$ 这种负数开平方的量为“诡辩量”．但这里已经不能再像过去解一元二次方程那样见到 $\Delta=b^2-4ac<0$，则声称根在实数范围无意义而舍弃．事实上，如果这时把 x_1 舍弃，舍弃的是实根4．所以人们开始接受负数开平方的运算，确认运算结果也是一个数．1637年，笛卡儿称负数开平方的结果是“虚数”．

1797年，挪威数学家韦塞尔对 $a+b\sqrt{-1}$ 作出几何解释，平面直角坐标系中，若一点 P 的坐标为 (a,b)，则向量 $\overrightarrow{OP}$ 用复数 $a+b\sqrt{-1}$ 表示．1801年，高斯引入记号 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$，复数 $a+b\sqrt{-1}$ 写成 $a+b\mathrm{i}$．

数系扩充的谱图如下：


正整数
整数
有理数
实数
复数
零
负整数
分数
无理数
虚数

附 录

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）